Maurizio Codogno

Matematica liofilizzata

I primi 50 post sul Post

Contenuto

(versione 1.0.1 - 1. ottobre 2010)

Prefazione

Dalla fine di aprile 2010 ho un blog ospitato dal *Post,* dal sottotitolo “un blog di matematica”. Come ho cercato di spiegare nello pseudoeditoriale del post numero 1, la mia idea è scrivere di matematica in maniera ultraleggera, evitando di copiare quello che si fa a scuola, dalle dimostrazioni senza senso agli esercizi che assomigliano più che altro a raffinate forme di tortura. Insomma, divulgazione matematica allo stato puro, che ne abbiamo sempre bisogno.

In questo ebook ho raccolto i primi cinquanta post che ho scritto; ho rivisto i testi originali per correggere errori e imprecisioni, ampliando qualche punto oscuro. La maggior parte dei post sono indipendenti: quelli che richiedono di essere letti in un ordine specifico sono indicati nel testo. Il libro è rilasciato sotto una licenza Creative Commons (la CC-BY-NC 2.5, per la cronaca): detto in altro modo, non potete spacciarlo come vostro né usarlo per scopi commerciali, ma una volta che dite che è roba mia potete distribuirlo e riciclarlo a piacere (anche in opere che *voi* vi fate pagare), come del resto bisognerebbe sempre fare con la matematica. Probabilmente è vero che *«Fai pagare qualcosa, ed improvvisamente assumerà una dignità radicalmente diversa da quella che aveva quando la regalavi.»* (cit.); e immagino che se qualcuno davvero interessato a questo ebook non avrebbe problemi a spenderci su un euro. Però sono pigro, non saprei cosa farmene di tutti quei soldi e soprattutto non saprei come dichiararli nella denuncia dei redditi; questo è poi materiale praticamente nella forma che si trova già online. Nel caso io faccia una versione più ampia di questo libro se ne riparlerà; per il momento godetevelo così. Non credo ci sarà un editore che vorrà pubblicarne una versione cartacea; per il momento lo metto su un sito di print-on-demand, cosicché chi volesse sentire il fruscio della carta sa come fare per procurarselo.

Grazie a tutti coloro che hanno commentato, corretto i miei errori o hanno fatto in modo che riscrivessi le cose in maniera più semplice e meno incomprensibile. Alcuni nick in ordine alfabetico: barbara, corax, debernardis, enricodelfini, fabiosirigu, fcaraven, gmbiardi, hronir, karl, luca, lucac, lucamc, m.fisk, mico, mmgg, pbocchini, piccoglio, play, tommaso denti. Se ho dimenticato qualcuno – o se qualcuno vuole un e-link per finire sul suo sito/blog – me lo segnali in modo che lo possa includere nella prossima ristamp... ehm, nel prossimo rilascio.

Grazie a Maria Serena Piccioni che ho stressato fin troppo per riuscire a formattare il testo in maniera decente con i CSS; grazie a Roberto Zanasi che mi ha fatto da beta reader su un vero lettore ebook e mi ha segnalato tutte le cose che non andavano, anche se poi non sono riuscito a correggere tutto: i font ungheresi e vietnamiti sono tosti; grazie a Luciano Blini che mi ha regalato l'immagine di copertina. Grazie anche a Strahinja Markovic, che ha rilasciato Sigil con cui ho trasformato il mio enorme file

XHTML nel formato ePub e a Kovid Goyal, che ha prodotto il gestore di ebook (e convertitore in formato mobi, per la gioia di chi ha un Kindle) Calibre. E grazie naturalmente ad Anna, che nonostante tutto mi sopporta ancora!

Per contattarmi, scrivete a matematica.liofilizzata (chiocciola) gmail.com e aspettate con fiducia: io rispondo sempre, anche se magari non subito.

1. La matematica non è poi così brutta

Il perché di un blog di matematica, e alcune istruzioni per l'uso, che si possono riassumere in "Don't panic!"

Non è affatto facile fare matematica. Non credete a chi vi dice il contrario: o è pagato per dirlo (un professore, per esempio, o un tutor CEPU) oppure non sa nemmeno che cosa sia, la matematica. Ma quello a dire il vero non è poi così importante. Non è nemmeno facile fare filologia romanza, o meccanica quantistica, o ancora allenare la nazionale di calcio. Eppure l'Italia è una nazione di allenatori, e tantissima gente sta lì a bocca aperta a sentire raccontare il paradosso del gatto di Schrödinger; la filologia romanza in effetti non ha tutto quel fascino, ma lì non saprei proprio cosa dire al suo riguardo. A dire il vero non saprei nemmeno dire molto riguardo all'allenare la nazionale, ma non importa.

Qual è la differenza tra la meccanica quantistica e la matematica, che fa sì che la prima sia tanto apprezzata e la seconda tanto negletta nel campo della divulgazione? Beh, innanzitutto a scuola non ti costringono a studiare le equazioni di Schrödinger. Credo che tutti i compiti in classe fatti nel corso dei propri studi abbiano dato un imprinting difficilmente eliminabile, con l'ulteriore fregatura che nessuno è mai riuscito a capire a che cosa mai servisse semplificare quelle chilometriche espressioni che nessuno ha mai visto da nessuna parte. Non posso dare tutti i torti a questi matematofobi; è vero che in tutti i campi occorre sempre fare esercizio prima di ottenere qualche risultato, ma anch'io ho l'impressione che i programmi scolastici di matematica non abbiano chissà quale relazione con la vita di tutti i giorni.

Però non sono nemmeno d'accordo con chi dice che l'unica matematica che può servire è quella per fare il conto della spesa, e che oramai non serve nemmeno quella perché tanto ci sono le calcolatrici. Secondo me la domanda è mal posta: ci serve sapere del gatto di Schrödinger? Direi proprio di no. Il punto è che se uno riesce a levarsi dalla testa i pre-giudizi del tipo «io la matematica non la capisco, non mi entra proprio in testa» e si limita a vedere presentati alcuni risultati matematici, può anche iniziare ad andarci d'accordo. È vero, in questo modo non si fa matematica; ma non è scritto da nessuna parte che ognuno di noi debba fare tutto. Quanti di voi hanno scritto poesie (io no) oppure canzoni (ebbene sì, ne ho composta qualcuna)? E quanti, dopo aver deciso che era meglio lasciar perdere, hanno smesso di leggere e ascoltare le opere altrui?

Ecco. Quello che vorrei fare è liberare la matematica dai sotterranei in cui è stata cacciata e portarla all'aria aperta. In Germania c'è stata una rubrica di matematica sul Die Welt. Il New York Times ne ha fatta tenere una da Steven Strogatz. Al Wall Street Journal Carl Bialik, "The Numbers Guy", ha il suo blog. Da noi troviamo un po' di matematica al massimo sui periodici, con Piergiorgio Odifreddi e i benemeriti Rudi Matematici su Le Scienze. Perché non può esserci una rubrica matematica anche su un giornale, pur sui generis, italiano?

2. Mille per cento? sicuri?

La terminologia usata in economia è un po' diversa da quella che insegnano a scuola (no, non è una battuta); per convertirla nel linguaggio usuale occorre una certa attenzione per evitare errori!

Il 28 aprile 2010 su Repubblica si parlava della crisi finanziaria greca e si raccontava di come i tassi di interesse sul debito pubblico di Atene stessero schizzando verso l'alto. Peccato che la frase usata per dirlo sia stata «Il differenziale tra bond greci e tedeschi vola oltre il 1000 per cento», frase che colpisce per il numerone ma che non ha nessun significato reale.

Giusto per spiegarci meglio: il “differenziale” lo si trova sulle auto, e io parlerei di “differenza”, ma se si vogliono usare i paroloni possiamo ancora far finta di nulla. Calcolare la differenza in percentuale è un po' buffo – ma vedi sotto, visto che è un'usanza dei mercati finanziari; però “il 1000 per cento”, significa “dieci volte tanto”, e quindi una differenza del 1000% significa moltiplicare per undici il valore originale, esattamente come un aumento del 100% significa raddoppiarlo. Facendo un po' di rapidi conti e stimando il tasso di interesse offerto dai Bund tedeschi al 3% annuo, significherebbe che i titoli di Stato greci andrebbero ben oltre il 30% di interesse annuo, roba che nemmeno nei più sfrenati sogni degli speculatori. E in effetti la frase prosegue un po' diversa: «e il tasso d'interesse sui bond greci decennali tocca la quota record del 13,1 per cento».

Toh, qualcosa non torna. La differenza non è certo del 1000%. Cosa può essere successo? Semplice. In finanza si usa il **punto base**, che equivale allo 0.01% di differenza tra due tassi. Quando fate un mutuo e vi dicono che lo spread sull'Euribor è dello 0,8%, il bancario internamente pensa a 80 punti base di differenza, ma per facilitarvi la vita ve lo traduce in una percentuale. Poi magari voi non sapete cosa siano lo spread (la differenza rispetto a un tasso base) e l'Euribor (un tasso di riferimento europeo), ma questa è un'altra storia e dovete cercare un blog economico per saperne di più. Mille punti base sono dieci punti percentuali; adesso finalmente tutto torna, visto che la differenza tra il supposto tasso al 3% tedesco e il 13,1% effettivo greco è proprio circa di dieci punti percentuali. Se volete proprio una percentuale relativa per la differenza, la possiamo stimare intorno al 350% in più; inutile calcolare il tasso con più precisione, perché non abbiamo abbastanza cifre di partenza per fare i calcoli, e quindi il margine di errore possibile sarebbe troppo grande.

L'unica cosa che mi resta da capire è se qualcuno legga effettivamente questo tipo di articoli economici, oppure l'importante è infilare alcuni numeri a casaccio.

Post Scriptum: sono poi andato a cercare i tassi dei Bund tedeschi. Secondo il Sole-24 Ore il 20 aprile i Bund offrivano un rendimento del 3,23%, un po' più di quanto immaginassi. Le considerazioni qualitative restano però le stesse.

3. 30virgola28

Non sempre la precisione è necessaria; anzi in certi casi è semplicemente ridicola, soprattutto quando si convertono unità di misura diverse.

Tra i disastri ambientali statunitensi della primavera 2010 non c'è stata solamente la fuoriuscita di greggio da una piattaforma al largo delle coste della Louisiana. Nel Massachusetts si era infatti crepata la conduttura di uno degli acquedotti principali che servono la zona intorno a Boston. Il Corriere della Sera ne aveva dato notizia, specificando che venivano dispersi ogni ora 30,28 milioni di litri d'acqua.

Due milioni di persone nell'area della Grande Boston, nello stato americano del Massachusetts, sono rimasti senz'acqua potabile per la rottura della conduttura principale dell'acquedotto di Weston. La crisi è iniziata ieri quando si è aperta una crepa nel tubo del diametro di tre metri che pesca l'acqua dal bacino di Quabbin. L'emergenza è stata definita <catastrofica> dalle autorità locali: ogni ora 30,28 milioni di litri vengono dispersi nel fiume Charles. Gli abitanti della zona sono stati invitati a bere esclusivamente acqua bollita e a prendersi cura delle necessità dei vicini, soprattutto le persone anziane e i disabili.

Figura 3.1: 30,28 milioni di litri. Che precisione!

Spero che nessuno si sia chiesto come facciano gli americani a conoscere così bene la portata dei loro acquedotti per fare stime così precise! Il sistema più semplice per capire cos'è successo consiste nell'andare su Google e digitare come stringa di ricerca “`30.28 liters in gallons`” (ma va bene anche scrivere in italiano “30,28 litri in galloni”). Non tutti sanno infatti che Google fa anche da convertitore automatico, non solo di unità di misura ma anche di valute. Il risultato è immediato: san Google mi comunica che “30.28 liters = 7.99912975 US gallons”; quindi nella notizia di agenzia originale c'era scritto che ogni ora venivano dispersi 8 milioni di galloni d'acqua, e chiunque l'abbia tradotta in italiano si è limitato a fare la moltiplicazione e trascrivere il risultato in litri, senza pensare che il risultato, per quanto formalmente corretto, non aveva alcun senso in quel contesto. Nessuno può essere certo che i galloni effettivamente dispersi non siano in realtà sette milioni e mezzo oppure otto milioni e mezzo, con un errore inferiore al 10%; sarebbe quindi stato molto più logico tenere conto di questo possibile errore e scrivere che si stanno disperdendo trenta milioni di litri d'acqua all'ora.

Io sono un talebano arrotondatore, e avrei preferito addirittura scrivere che ogni secondo si disperdono più di duemila litri d'acqua – non 2222 litri, mi raccomando! – perché ritengo più importante usare numeri più maneggevoli e che possano dare un'idea di cosa sta effettivamente capitando; ma sicuramente il “virgola ventotto” dovrebbe essere aborrito da chiunque voglia fare comunicazione.

Il lettore più attento a questo punto potrebbe chiedersi cosa io pensi di Google che invece che convertire i 30,28 litri in 8 galloni ha voluto specificare che i galloni sono 7,99912975; il ragionamento da fare in questo caso è però un po' più complesso, e merita una trattazione separata; nel post numero 17 dirò qualcosa in più. Per il momento mi limito a consigliarvi una tecnica pratica: se scrivete un numero solo per dare un'idea delle dimensioni di qualcosa, spesso basta usare solamente una cifra diversa da zero, e non avrete quasi mai bisogno di usarne più di due.

(3 maggio 2010)

4. Probabilità truffaldine

Un problema di calcolo delle probabilità dove la risposta immediata è sbagliata. Non sempre si può assumere che i casi possibili sono indistinguibili!

Eccovi un semplicissimo problema di calcolo delle probabilità: come direbbe un imbonitore, “non c'è trucco non c'è inganno!” Prendete tre scatole identiche, e inserite due biglie in ognuna di esse. La prima scatola conterrà due biglie bianche, la seconda due biglie rosse, e la terza una bianca e una rossa. A parte il colore, le biglie sono tutte identiche, quindi non potete distinguerle al tatto. Fate in modo che qualcuno posizioni le scatole a vostra insaputa, sceglietene una a caso, metteteci la mano dentro senza guardare e prendete una biglia. Tiratela fuori: è bianca. Qual è la probabilità che anche l'altra biglia nella scatola sia bianca?

Molto spesso la gente a cui viene posta la domanda ragiona in questo modo: se etichettiamo le tre scatole come RR, RB e BB dalle iniziali dei colori delle biglie che contengono, è chiaro che non possiamo avere scelto la prima scatola. Ne restano due, nel primo caso l'altra biglia è rossa e nel secondo bianca; quindi la probabilità che anche la seconda biglia sia bianca è il 50%, o come direbbe un matematico 1/2 (i matematici invece che dire 100% dicono 1, così tutte le probabilità sono numeri compresi tra zero e uno. Dopo un po' non solo ci si abitua ma si capisce che si fanno meglio i conti). Quello appena presentato è un ottimo ragionamento: peccato che sia sbagliato.

Non ci credete? Facciamo lo stesso esperimento, ma con una piccola differenza. Le tre biglie bianche e quelle rosse non sono più identiche; su una biglia bianca e una rossa c'è disegnato un cerchietto, su un'altra coppia una crocetta e sulla terza coppia una stellina. Mettiamo ora le due biglie con la stellina in una scatola; le altre due avranno pertanto una biglia con un cerchietto e una con una crocetta, in una scatola bianche e nell'altra rosse. Tiriamo fuori, proprio come prima, una biglia bianca e vediamo cosa è successo. Se la biglia ha una stellina, è stata presa dalla scatola RB e quindi l'altra biglia sarà rossa (anch'essa con la stellina, per la cronaca); se invece ha un cerchietto oppure una crocetta è stata presa della scatola BB e quindi l'altra biglia sarà bianca. In definitiva la probabilità che anche la seconda biglia sia bianca non è 1/2 ma 2/3, cioè il 66,6%. Una bella differenza, e se aveste scommesso alla pari non vi sarebbe andata così bene.

Qualcuno potrebbe dire che contrassegnando le biglie abbiamo aggiunto dell'informazione, e quindi modificato le probabilità. È vero che nel secondo esperimento non parliamo più di probabilità, perché vedendo il contrassegno sulla biglia sappiamo immediatamente qual è il colore della biglia rimasta nella scatola; ma bisogna pensare il controllo del simbolo come una cosa che si fa dopo, per vedere se ci abbiamo azzeccato o no. Un modo alternativo per vedere che la probabilità è 2/3 e non 1/2 è quello che potremmo chiamare **del multiverso**. Immaginiamo di avere sei persone che si dedicano all'esperimento, e

che ciascuno di essi scelga una pallina diversa. Tre di loro si troveranno in mano una biglia rossa, e quindi verranno eliminati senza rimpianto. Degli altri tre, due avranno preso la biglia dalla scatola con due biglie bianche, mentre il terzo l'avrà presa da quella contenente una biglia bianca e una rossa. Ecco che troviamo di nuovo la probabilità 2/3, e questa volta senza nessun contrassegno da mettere.

Come immagino vi siate accorti, è vero che quando si calcolano le probabilità si fa generalmente l'assunzione che tutti i vari casi siano indistinguibili, e quindi non c'è nessuna differenza a priori che renda più presumibile che lanciando un dado esca un cinque o un tre; ma bisogna stare attenti ad accorgersi di quando ci sono due casi effettivamente diversi. Alcuni antropologi si sono persino spinti a dire che il cervello umano non è stato programmato per operare secondo i dettami della probabilità; a giudicare da quanti sono convinti di avere il metodo perfetto di vincere alla roulette, forse hanno ragione.

(5 maggio 2010)

5. Il premio Nobel mancato

Ci fosse stato un premio Nobel per la matematica, secondo me sarebbe dovuto andare prima o poi a Martin Gardner, anche se matematico non lo era affatto.

Come penso sappiate, non esiste il premio Nobel per la matematica. Le malelingue dicono che è tutta una storia di corna, con la moglie di Alfred Nobel che lo lasciò per mettersi insieme al più grande matematico svedese del tempo, Gösta Mittag-Leffler: peccato però che Nobel fosse scapolo. Più facile che sia successa un'altra cosa: uno che aveva fatto i milioni inventando la dinamite immagino considerasse la matematica come una scienza di nessuna utilità pratica e non gli fosse nemmeno venuto in mente di premiare chi la studiasse. In fin dei conti i soldi erano i suoi, e qualche matematico il Nobel se l'è vinto lo stesso di sguincio. Per la cronaca, esistono dei prestigiosi premi dedicati ai matematici, come le Fields Medal e il Wolf Prize per la matematica; e credo che l'Abel Prize sia il vero equivalente del Nobel, anche se il fatto che abbia un nome diverso, a differenza del (finto) Nobel per l'economia, lo renda poco noto al grande pubblico.

Ma se si dovesse assegnare una tantum il prestigioso premio a qualcuno che ha contribuito all'avanzamento delle scienze matematiche, non avrei alcun dubbio su chi lo meriterebbe: Martin Gardner. A dire il vero, lui non ha mai dimostrato nessun risultato degno di nota; ma è stato colui che ha fatto sì che migliaia di persone scegliessero di studiare matematica, e studiosi di almeno tre generazioni sono anche se indirettamente suoi discepoli. La cosa più divertente è che Gardner non è affatto un matematico! Le sue conoscenze scolastiche si sono fermate alle scuole superiori, e non si è mai fatto problemi a dire di avere avuto dei problemi con l'analisi matematica. Studiò invece filosofia, e dopo la seconda guerra mondiale trovò lavoro come giornalista scientifico, pronto soprattutto a combattere la pseudoscienza. Il primo libro da lui pubblicato è stato infatti *Fads and Fallacies in the Name of Science.* Tutto però cambiò quando nel 1956 la direzione dello Scientific American gli propose di tenere una rubrica fissa di giochi matematici (la cui versione italiana era “Giochi matematici”, pubblicata su Le Scienze). Nei venticinque anni successivi Gardner cambiò completamente il significato dell'espressione, riuscendo a portare le nozioni matematiche al livello del grande pubblico e costruendo una fittissima rete di corrispondenze. In pratica è stato un catalizzatore, contribuendo a mettere in contatto tra loro semplici appassionati e professori non più rinchiusi in una torre d'avorio e a sdoganare la matematica che per la prima volta nel '900 aveva uno spazio ufficiale tra la scienza popolare.

Sono decine i libri di giochi matematici scritti da Martin Gardner, a cui bisogna aggiungere i suoi saggi, le edizioni critiche – se volete capire cosa sta dietro le storie carrolliane vi conviene prendere il suo *The Annotated Alice* e le opere di narrativa. A 95 anni compiuti lavorava ancora con la Mathematical Association of America per produrre la versione definitiva delle sue opere: direi che è la prova vivente

del fatto che la matematica mantiene giovani in spirito e non fa poi così male alla salute...

Post Scriptum: due settimane dopo che pubblicai questo post, Martin Gardner è improvvisamente morto. Nel post numero 12 trovate un suo ricordo più biografico.

(8 maggio 2010)

6. Meno per meno (più o meno)

La regola dei segni per la moltiplicazione è spesso difficile da comprendere al volo. Un esempio più o meno di vita reale può spiegare perché mai il prodotto di due numeri negativi è positivo.

Quando a scuola viene insegnata la regola dei segni (ve la ricordate? più per più uguale più; più per meno uguale meno; meno per più uguale meno; meno per meno uguale più) è facile prevedere quale sarà l'effetto sugli studenti. La maggioranza accetta supinamente quanto propinatogli dall'insegnante, senza porsi altra domanda che "come farò a ricordamela?" Ma quasi sempre c'è uno che si lamenta perché a suo parere non ha senso che meno per meno faccia più: com'è possibile che esca fuori dal cappello un numero positivo quando siamo partiti da due numeri negativi?

Se l'insegnante ha fretta, magari risponderà che anche nella lingua italiana due negazioni possono essere positive: "io non nego" significa "io affermo". O magari può ricordare che visto che dispari più dispari fa pari non esiste alcuna ragione che vieti che meno per meno faccia più; ma è più probabile che lasci perdere del tutto, e replichi «È così, punto e basta». Però il giovine è in buona compagnia; almeno fino a tutto il XVII secolo i numeri negativi non venivano proprio considerati, tanto che un matematico dell'epoca non avrebbe mai scritto l'equazione $x^3 - 5x = 8$. Occhei, non avrebbe mai scritto un'equazione ma usato una notazione prolissa, ma avrebbe comunque detto qualcosa tipo «cinque volte la cosa più otto è uguale al suo cubo», cioè in notazione moderna $x^3 = 5x + 8$. In fin dei conti, ancora oggi c'è chi dice che la temperatura minima è stata tre gradi sotto zero, e non −3 gradi, quindi non si può nemmeno dire che questa fobia sia passata proprio del tutto.

C'è però un modo relativamente semplice di osservare all'opera la regola dei segni: basta riuscire a visualizzare i numeri positivi e quelli negativi. Ad esempio possiamo associare al futuro i numeri positivi e al passato quelli negativi: quindi dire "l'altroieri" equivale a dire "−2 giorni rispetto a oggi", mentre "domani" è "+1 giorno rispetto a oggi". Ancora più semplice è associare i crediti ai numeri positivi e i debiti a quelli negativi. Se io non ho un euro e devo darne mille ai miei creditori, posso dire di avere −1000 euro.

Mettiamo ora insieme le due cose e vediamo cosa succede. Se io deposito sul mio conto corrente 1000 euro al mese, tra un anno, cioè +12 mesi, avrò 12000 euro più di quanto abbia ora. Più per più uguale più. Se è un bel po' che sto depositando, l'anno scorso (−12 mesi) avevo 12000 euro meno di quanto abbia ora. Più per meno uguale meno. Facciamo ora l'esempio opposto. Se dal conto corrente tolgo 1000 euro al mese per pagare il mutuo allora tra un anno avrò 12000 euro meno di adesso; meno per più uguale meno. Infine, se il mio è un mutuo trentennale che sto pagando da un pezzo, un anno fa nel conto c'erano 12000 euro più di oggi; ecco qua il "meno per meno uguale più".

Spero che la cosa sia più chiara in questo modo: nel caso servisse, andate pure a riesumare la vostra scatola di Monopoli® e un foglio di carta, e provate a fare i conti fisicamente. Il fruscio dei bigliettoni, anche se finti, è sempre la miglior musica!

(11 maggio 2010)

7. 750 miliardi in biglietti di piccolo taglio

La quantità di soldi stanziata nel piano finanziario europeo 2010 è enorme. Come possiamo farcene un'idea fisica? Stimiamo quanto spazio occuperebberebbo sotto forma di banconote.

Nel maggio 2010 i ministri finanziari europei hanno approntato un piano di stabilizzazione dei mercati del valore di 750 miliardi di euro. È chiaro che questi soldi sono immateriali, nel senso che si vedranno nelle transazioni economiche ma non vengono certo stampati. Però chiaccherando nel blog del *Bubbo Grasso* è uscita questa domanda: «Per portare via 750 miliardi in banconote da 50 euro ti ci vuole la macchina, il TIR o basta una valigetta?» Si può dare la risposta senza consultare Google e senza nemmeno carta e penna: quello che importa è sapere i trucchi adatti per fare delle stime, trucchi alla portata di ognuno di noi. Vediamo come.

Il modo più valido per affrontare questo tipo di problemi, noti anche come *Problemi di Fermi* perché il grande fisico italiano amava porli ai suoi collaboratori, è suddividerli in piccoli pezzi e usare nozioni della vita di tutti i giorni per arrivare a costruire lo schema definitivo. Iniziamo a stimare la superficie di una banconota da 50 euro: sarà intorno ai 100 cm^2 – più che approssimarla con un quadrato 10×10, la vedo come un rettangolo 14×7. Quindi un metro quadro conterrà 100 banconote, per un controvalore di 5000 euro. Lo spessore di una banconota non so come approssimarlo (un decimo di millimetro?), ma so che la carta da fotocopie pesa 80 g/m^2; immaginando un peso simile per le banconote, arrotondato a 100 g/m^2 per semplificare i conti, arrivo a dire che 50000 euro pesano 1 kg, quindi 50 milioni di euro 1 tonnellata, 50 miliardi di euro 1000 tonnellate, 750 miliardi di euro 15.000 tonnellate. Immaginando che un tir (con rimorchio) possa caricare 15 tonnellate, anche se la stima mi pare un po' esagerata, occorrono comunque 1000 tir. Se invece che le banconote da 50 prendiamo le banconote da 500 euro riusciamo a limitarci a "solo" 100 tir!

Già che ci siamo, quanto spazio occuperebbero tutti questi soldi? Posso stimare il peso specifico della carta come ragionevolmente simile a quello dell'acqua. Un metro cubo d'acqua è una tonnellata, quindi le banconote occuperebbero 15.000 metri cubi. Tralasciando banalità come il fatto che le fondamenta non reggerebbero mai un simile peso, potremmo riempire tre condomini di nove piani con due alloggi da 100 m^2 per piano...

Attenzione! Se si vuole lavorare con le stime, bisogna stare molto attenti ai dati di base che si usano. Per fare un esempio, quando scrissi inizialmente questo post io stimai il peso specifico della carta pari a tre volte quello dell'acqua, basandomi sui miei ricordi di scatoloni di libri da traslocare. Invece, come mi ha fatto notare Play, il peso specifico della carta è paragonabile a quello dell'acqua, quindi avevo sbagliato di un fattore 3 la mia stima; non un risultato da strapparsi i capelli per la disperazione, ma avrei comunque potuto fare meglio.

Un modo diverso per arrivare al risultato è stato fornito da corax. I suoi conti sono stati i seguenti:

- 1 foglio A4 = 6 banconote
- 1 risma = 6*500 = 3000 banconote
- 1 scatola (5 risme) = 15.000 banconote = 750.000 euro
- 750 miliardi di euro = 1 milione di scatole
- 1 scatola = 20*30*25 centimetri (a spanne)
- 1 metro cubo = 60 scatole
- 1 milione di scatole = 16.000 m^3, pari a circa 64 piscine olimpiche

È indubbiamente bello che – dopo aver corretto la mia stima iniziale del peso specifico della carta – i due risultati siano praticamente uguali; è pertanto abbastanza plausibile che i conti siano corretti, nei limiti delle approssimazioni fatte da entrambi.

Se questo tipo di problemi vi piace, vi consiglio di procurarvi *Più o meno quanto?* – agile libretto pubblicato in Italia da Zanichelli e dedicato appunto all'arte della stima.

(14 maggio 2010)

8. Win for Life (non proprio)

A marzo un concorso di Win for Life ha visto ben 59 vincitori dividersi il jackpot, che è rimasto miserrimo. La combinazione vincente? 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10. Sarà stato un caso così speciale?

Leggendo il blog di divulgazione scientifica *Gravità Zero* ho scoperto che i fortunati – si fa per dire – vincitori del concorso Win for Life di sabato 13 marzo alle ore 19 non hanno vinto i 4000 euro al mese per vent'anni promessi dalla pubblicità. In effetti il regolamento dice che il jackpot viene diviso tra tutti i vincitori; in genere ce ne sono al massimo due, ma quella volta ce n'erano stati ben 59, e così a ciascuno di essi sono toccati 67,80 euro il mese. Ma quali erano stati i dieci numeri usciti? Se non lo sapevate, Non ci crederete: 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10. Un caso oppure un'estrazione truccata?

QUOTE WFL		
N.vincite	Categoria	EUR
38	10+	67,80 al mese per 20 anni
835	10	44,68
622	9	26,53
3.983	8	8,59
17.886	7	2,51

QUOTE WFL		
N.vincite	Categoria	EUR
21	0+	67,80 al mese per 20 anni
396	0	44,68
216	1	26,53
1.259	2	8,59
7.605	3	2,51

Montepremi 266.827,60 EUR

Figura 8.1: estrazione del 13/3/10 ore 19, dal sito www.sisal.it

Prima di rispondere alla domanda (retorica) spiego velocemente il regolamento di Win for Life. Vengono fatte undici estrazioni al giorno, una ogni ora. Si estraggono dieci numeri tra 1 e 20; ci sono quattro categorie di vincite standard, con 10, 9, 8, 7 punti. Inoltre viene estratto a parte un altro numero tra 1 e 20, il cosiddetto "numerone". Se oltre ad avere indovinato tutti e dieci i numeri si è azzeccato anche quello, si vince il jackpot: i 4000 euro al mese (suddivisi tra tutti i vincitori, ormai l'avete capito!) della pubblicità. Infine, se uno pensa di essere davvero sfigato, può raddoppiare la puntata e vincere anche nel caso abbia indovinato 0, 1, 2 oppure 3 numeri. Diciamo subito che scegliere o no quest'opzione è assolutamente indifferente. Pensateci un attimo su: se avete fatto zero (oppure 1, 2, 3) con i dieci numeri

che avete scelto con tanta cura, avreste fatto dieci (9, 8, 7) con i dieci numeri che **non** avete scelto, no? Raddoppiare la puntata è insomma una scorciatoia per non dover compilare due schedine.

Fatte queste premesse, spero non ci sia nessuno davvero convinto che una combinazione con dieci numeri consecutivi è intrinsecamente meno probabile, o se preferite meno casuale, di una con dieci numeri senza alcuno schema riconoscibile. Il punto è che il nostro cervello è cablato per riconoscere le configurazioni interessanti sin dall'epoca in cui il concetto di "interessante" si applicava allo scorgere una belva intenzionata a cibarsi di noi, e così non riusciamo a convincerci che una combinazione che non sembri casuale possa invece esserlo davvero. Peggio ancora, l'uomo è intrinsecamente prevedibile: così parecchie persone, pur convinte che in effetti la combinazione 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10 avesse la stessa probabilità di uscita di una qualunque altra combinazione, l'hanno giocata apposta pensando «chi volete che la scelga?» Ecco. Ora avete visto che c'è chi la sceglie, e sono anche parecchi. In generale, a differenza di concorsi tipo il lotto o la roulette dove la vincita per chi azzecca una combinazione è indipendente da cosa hanno giocato gli altri scommettitori, quando c'è un montepremi da suddividere non basta fare considerazioni matematiche ma occorre anche tenere conto di quelle psicologiche. Una faticaccia: se dovete fare una puntata, insomma, o avete il nonno che vi dà in sogno i numeri da giocare, oppure vi conviene usare un generatore di numeri casuali.

Resta ancora da vedere se vedere questa combinazione apparire così presto sia davvero incredibile oppure no. Qua occorrerebbero analisi statistiche accurate che vi evito, limitandomi a una stima molto spannometrica ma che dovrebbe darvi un'idea di cosa c'è in gioco. Il numero possibile di modi in cui si possono scegliere dieci elementi in un insieme di 20 è dato dalla formula 20!/(10!·(20-10)!), dove il punto esclamativo indica la funzione fattoriale, il prodotto di tutti i numeri da 1 a quello scritto. Fatti i conti, vengono fuori poco meno di 200.000 scelte possibili, per la precisione 184.756. (Attenzione! Per vincere il jackpot non basta indovinare i dieci numeri ma serve anche centrare il numerone: ecco perché le combinazioni diverse sono venti volte tanto, 3.695.120. Ma in questo nostro ragionamento il numerone non entra in gioco). Secondo il bollettino ufficiale, il concorso troppo vincente è stato il numero 2153; tenendo conto che in teoria potrebbe anche essere stata estratta più volte la stessa decina, direi che c'era circa l'1% di probabilità che apparisse così presto. Una coincidenza interessante, vero?

Nì. Se l'estate scorsa, quando fu lanciato Win for Life, qualcuno avesse scommesso sull'uscita entro marzo della combinazione 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10 allora in effetti sarebbe stata una bella coincidenza. Ma noi avremmo detto lo stesso se fossero uscite altre combinazioni interessanti, come tanto per dire 11-12-13-14-15-16-17-18-19-20 oppure 2-4-6-8-10-12-14-16-18-20. Come per l'uovo di Colombo, un conto è specificare la coincidenza in anticipo; molto più facile invece accorgersi della coincidenza a posteriori. In definitiva, meglio evitare di fare un esposto alla magistratura per un concorso evidentemente truccato!

(17 maggio 2010)

9. Il paradosso di Berry

Qual è il più piccolo intero che non può essere descritto in italiano con meno di quaranta sillabe?
Definirlo non è così facile come sembra.

Stavolta, almeno per quanto riguarda la matematica, mi limito al minimo indispensabile: i numeri interi positivi. Lo sapete che **tutti** i numeri interi sono interessanti? Tanto per iniziare, 1 è interessante per tantissime ragioni, per esempio perché è l'unico intero n il cui inverso $1/n$ sia intero; 2 è interessante perché tra l'altro è l'unico numero primo pari; 1729 lo è in quanto il più piccolo intero esprimibile come somma di due cubi in due modi diversi, come Ramanujan fece notare a Hardy (le somme sono 10^3+9^3 e 12^3+1^3), e così via. Se ci fossero dei numeri non interessanti, ci sarebbe anche il più piccolo tra essi. Ma a questo punto non vorreste forse concedermi che un numero con la caratteristica di essere il minore tra i numeri non interessanti è *ipso facto* interessante? E dopo averlo spostato nella categoria "interessanti", cosa facciamo del *nuovo* numero minore tra i non interessanti?

In effetti, la definizione di "numero interessante" è un po' nebulosa, visto che non esiste un modo univoco per definire interessante una proprietà; quindi questo esempio è solo uno scherzo. Ma le cose non sono così semplici. Iniziamo ad associare a ciascun numero tutte le sue *descrizioni*, vale a dire le espressioni – aritmetiche e no – che danno come risultato quel numero. Per esempio, 4 lo possiamo descrivere come "quattro", ma anche come "due più due", "radice quadrata di sedici", "il secondo numero pari", "il numero di semi in un mazzo di carte francesi", "il doppio dell'unico numero x diverso da zero per cui $x+x = x \cdot x$", e chi più ne ha più ne metta.

Supponiamo ora di essere amanti del risparmio, e voler perdere il minor tempo possibile per pronunciare i vari numeri. Visto che approssimativamente ogni sillaba si pronuncia nello stesso tempo, per ogni numero dovremmo scegliere quella con il minor numero di sillabe. Nel caso di 4 direi che "quattro" è imbattibile, però già nel caso di 999.999 piuttosto che dire "novecentonovantanovemila novecentonovantanove" (venti sillabe) è molto meglio usare la forma "un milione meno uno" (otto sillabe).

In effetti la lingua italiana permette di avere un numero finito di sillabe diverse, direi qualche centinaio o al più qualche migliaio. Inoltre, la maggior parte delle "frasi" composte assemblando sillabe a caso, come chessò "efnufi sildinel lin idiqualce", non hanno senso in italiano; molte delle frasi sensate, come "il giro del mondo in ottanta giorni", non corrispondono inoltre a nessun numero. Quindi a maggior ragione usando un qualunque numero di sillabe prefissato si possono descrivere solo un numero finito di numeri interi; questo a sua volta significa che esiste il più piccolo intero che non può essere descritto in italiano con meno di quaranta sillabe. Sarà un numero enorme, non avrei nemmeno idea di quanto grande esso possa essere; ma è un numero finito, e con sufficiente pazienza e un universo abbastanza grande lo

possiamo calcolare in linea di principio. Ma...

Ma c'è un piccolo problema. *“Il più piccolo intero che non può essere descritto in italiano con meno di quaranta sillabe”* è indubbiamente la descrizione di un intero. Contate il numero di sillabe della frase: sono trentuno. Ma allora abbiamo trovato una descrizione di quell'intero con meno di quaranta sillabe, e dunque non può essere il più piccolo intero che non può essere descritto con meno di quaranta sillabe. C'è qualcosa che non torna: scosso scosso, sento odor di paradosso!

Il primo ad avere evidenziato questo paradosso è stato nel 1904 un certo G.G. Berry, della Biblioteca Bodleiana di Oxford; non l'ultimo arrivato, insomma. Berry scrisse subito al miglior esperto di paradossi del tempo: Bertrand Russell, quello che aveva tirato fuori l'esempio del barbiere che tagliava la barba a tutti e soli quelli che non se la tagliavano da sé. Russell apprezzò davvero il paradosso, tanto che nei suoi *Principia Mathematica* Berry fu una delle due uniche persone citate. Fortunatamente, non fu così berrybile riuscire ad addomesticare il paradosso; il trucco è eliminare la possibilità di operare a livelli semantici diversi. Detto in parole povere, nelle descrizioni non si può parlare delle descrizioni stesse. Russell pensava di essere riuscito a mettere tutto a posto con questa gerarchia di descrizioni, salvo venire clamorosamente smentito due decenni dopo; ma questa è un'altra storia.

(Nel capitolo 8 di *Anelli nell'io* di Douglas Hofstadter trovate un resoconto un po' più ampio del paradosso di Berry; gli anglofili possono anche leggere un articolo di Gregory Chaitin)

(19 maggio 2010)

10. Sistema anti-intercettazioni

Sembra facile scambiarsi messaggi d'amore senza che nessuno possa leggerli. Si può chiuderli in una scatola con un lucchetto, ma se l'interlocutore non ha la chiave?

Ecco un semplice problema matematico – non aritmetico, non occorre fare nessun conto per risolverlo! Al limite potete definirlo "logico-informatico": perlomeno non ci sono conti da fare.

Giulietta e Romeo sono trattenuti in due città lontane, e vorrebbero scambiarsi infuocate lettere d'amore mentre cercano di trovare un modo per riunirsi. Purtroppo però il servizio postale è pieno di spie, e i due sono certi che ogni lettera da loro scritta verrà aperta e letta prima di essere eventualmente consegnata al destinatario. L'unica possibilità per avere un minimo di riservatezza è spedire le missive all'interno di una scatola chiusa con uno o più lucchetti; in questo caso la missiva viene consegnata senza che sia possibile leggerne il contenuto. Purtroppo i due amanti non hanno pensato di scambiarsi le chiavi dei loro lucchetti prima di separarsi. Inviare la chiave all'interno di una scatola aperta non è un'opzione fattibile, visto che la chiave verrebbe subito presa per farne una copia. Anche un lucchetto aperto verrebbe preso, i cattivi farebbero un calco, e quindi non servirebbe a nulla. Né i due si fidano di consegnare le chiavi a un messaggero: l'unica possibilità che hanno è usare il servizio postale, con tutte le limitazioni indicate sopra. Riuscite a trovare un modo perché i due possano riuscire a spedirsi le loro lettere senza che vengano lette da nessun altro, prima di continuare la lettura?

La soluzione al problema è a mio parere geniale. Giulietta manda a Romeo la scatola col proprio messaggio e gli mette un lucchetto G. Romeo riceve la scatola e la rimanda indietro, **aggiungendo il proprio lucchetto R**. In questo secondo viaggio la scatola ha pertanto due lucchetti, G e R. Giulietta, una volta riottenuta la scatola, toglie il proprio lucchetto e la manda una seconda volta a Romeo: ora la scatola ha solo il lucchetto R, che Romeo può tranquillamente togliere, riuscendo finalmente ad aprire la scatola e a leggere il messaggio. L'unica fregatura, se proprio volete, è che le poste si sono fatte un po' di soldi con tutti questi trasferimenti. Spero che i due amanti si siano ricordati di inserire oltre alla lettera anche una copia della chiave dei propri lucchetti per gli invii futuri!

Il problema può apparire piuttosto ozioso, almeno a prima vista, ma non è affatto così: la soluzione indicata è alla base del primo sistema di crittografia a chiave pubblica, quello di Diffie-Hellman. Anche nei sistemi di crittografia bisogna nascondere il messaggio da un possibile intruso che lo intercetti, e lo si vorrebbe fare senza per l'appunto scambiarsi in anticipo una chiave crittografica. Il punto chiave :-) dell'algoritmo consiste nel trovare un sistema per applicare più trasformazioni crittografiche del testo che siano **commutative**, e cioè possano essere eseguite in un ordine qualunque dando lo stesso risultato; altrimenti chi ha crittografato per primo deve essere l'ultimo a decrittare, e rimaniamo al punto di partenze. Nell'algoritmo di Diffie-Hellman l'operazione commutativa è l'elevazione a potenza modulo p,

cioè il resto della divisione di N^a per p; infatti $(N^a)^b = (N^b)^a$. Non che basti questo per avere un algoritmo robusto, ma uscirei dal seminato a spiegare il funzionamento dell'algoritmo in questo contesto. Per stavolta limitiamoci ad apprezzare che anche i problemini matematici hanno applicazioni serie!

(21 e 22 maggio 2010)

11. Come siamo arrivati al sudoku?

La storia del sudoku è istruttiva: un gioco può affiorare in superficie in tempi e luoghi diversi, ma il successo arriverà per caso.

Lo so. Il sudoku **non è** un gioco aritmetico. Il fatto che gli schemi presentino dei numeri è del tutto ininfluente nella sua risoluzione: sarebbe la stessa cosa se ci fossero delle lettere, dei colori, dei dingbats ✆✈✎✪, oppure delle faccine. Ma un po' di matematica in fin dei conti è nascosta, e soprattutto la storia di come il gioco è nato (che ho trovato sul libro di David Bodycombe *The Riddles of the Sphinx*, ma è anche presente su Wikipedia, almeno in parte) è abbastanza simpatica da meritare di essere raccontata.

Tutti dicono che la storia nacque con Eulero, ma ad essere onesti non è che lui c'entri molto con il sudoku: nel 1783 si era limitato a studiare i *quadrati latini* (quelli $n \times n$ dove in ogni riga e in ogni colonna erano presenti i numeri da 1 a n) e verificare quando si poteva averne più di uno "ortogonale", cioè tale che sovrapponendo i due quadrati si ottenessero coppie di numeri tutte diverse, come nell'esempio qui sotto dove ci sono tre quadrati latini di ordine 4 ortogonali: i numeri a sinistra, al centro e a destra. Eulero congetturò che fosse sempre possibile trovare una configurazione di questo tipo tranne che nei casi in cui n fosse della forma $4k+2$, ma fu smentito clamorosamente alla fine degli anni '50: solo i casi $n=2$ e $n=6$ sono infatti impossibili, anche se è vero che negli altri casi si possono sempre trovare $n-1$ quadrati ortogonali mentre al momento per $n=10$ ne sono stati trovati al più due. Come potete vedere, con il sudoku c'è davvero poco in comune se non il poter avere un quadrato 9×9.

000	111	222	333
123	032	301	210
231	320	013	102
312	203	130	021

Figura 11.1: tre quadrati latini di ordine 4 ortogonali tra loro

Dopo questa *nouveau espèce di carrés magiques* non successe nulla per un secolo. Nel 1892 un giornale parigino, *Le Siècle*, pubblicò però un quadrato magico 9×9 dove anche i quadratini 3×3 contenevano i

numeri da 1 a 9. Non era però ancora il sudoku come lo conosciamo noi, perché per essere risolto occorreva usare della matematica per trovare i numeri giusti da mettere nelle caselle. Dopo questo isolato exploit non si parlò di questo gioco fino alla fine degli anni 1970, quando gli statunitensi della Dell Publisher pubblicarono il "Number Place", che nacque quasi esattamente come un attuale sudoku: griglia 9×9 con tre sottoquadrati 3×3, numeri da 1 a 9 tutti presenti su ogni riga, ogni colonna e ogni quadratino. Erano però molto più facili degli schemi attuali, e nei primi esempi c'erano addirittura gli aiutini: caselle con un cerchietto dove venivano specificate quali numeri potevano essere inseriti. Non è certo chi abbia inventato questo gioco, anche se sofisticate tecniche poliziesche ritengono che l'autore sia tale Howard Garns.

Finalmente il Sudoku arriva in Giappone e prende il suo nome: nell'aprile 1984 l'editore nipponico Nikoli scoprì il Number Place e lo riciclò nella sua rivista, con il nome *Suuji wa dokushin ni kagiru*, che tradotto significa più o meno «i numeri devono essere solitari». Per comodità il nome venne rapidamente abbreviato in "su-doku", "numero singolo", e la Nikoli registrò il termine in Giappone (ma non all'estero! Ecco perché tutti noi lo possiamo chiamare sudoku: non ci sono diritti sulla parola). Giochi logici di questo tipo sono molto apprezzati in Giappone, dove a causa degli ideogrammi le parole crociate sono virtualmente impossibili, e il sudoku raggiunse il secondo posto, dopo il kakuro (che in effetti è più matematico).

Il penultimo passo avvenne nel 1997, quando un ex avvocato neozelandese, Wayne Gould, durante una vacanza in Giappone vide uno schema di sudoku in un giornale; essendo più o meno l'unica cosa a lui comprensibile in mezzo a tutti quegli ideogrammi lo provò, gli piacque, e nei sei anni successivi lavorò a un software in grado di generare automaticamente schemi di sudoku. Per la cronaca, ci sono 6.670.903.752.021.072.936.960 schemi possibili, circa lo 0,00012% del numero di quadrati magici 9×9; eliminando però gli schemi "essenzialmente identici", ad esempio quelli ottenibili con rotazioni e riflessioni, o permutando le cifre, oppure scambiando di posto ad esempio le prime due righe, si è calcolato che ne restano "solo" 5.472.730.538; abbastanza per giocarci ancora un po', direi, tenendo anche conto che da un singolo schema completato si possono ottenere vari schemi giocabili a seconda di quante e quali caselle si riempiano.

Nel 2004, dopo avere inutilmente tentato di vendere il sudoku negli USA, Gould si rivolse in Gran Bretagna al *Times*, che accettò i giochi e pubblicò il primo schema il 12 novembre 2004. Ma come nelle migliori tradizioni, gli altri giornali (con l'eccezione del *Guardian*, che ritenne che il gioco non avrebbe avuto futuro, copiarono subito l'idea: il *Daily Mail* pubblicò il suo primo schema dopo solo tre giorni! Peccato che gli diedero il nome "Codenumber", facendo un clamoroso autogol. Il resto è storia :-)

(25 maggio 2010)

12. Martin Gardner

Un ricordo più o meno biografico del maggior divulgatore matematico del ventesimo secolo.

Forse qualcuno dei miei ventun lettori si sarà chiesto come mai non ho subito scritto sul blog della morte di Martin Gardner, avvenuta improvvisamente – per quanto si possa parlare di "improvviso" per un novantacinquenne – la notte del 22 maggio 2010. O forse no: mentre fin dal mattino di domenica 23 in rete rimbalzava la notizia, il primo lancio di agenzia è apparso lunedì 24, e né il Corriere della Sera né Repubblica hanno riportato la notizia, che ho visto solo sulla Stampa, con un articolo di Piero Bianucci, e sui giornali del gruppo Caltagirone. Se la notizia vi è sfuggita, siete perdonati. Il mio silenzio nasceva più che altro perché avevo scritto di lui appena due settimane prima nel post numero 5, e non mi pareva il caso di ripetermi; ma forse qualche notizia in più può dare un'idea della persona che è stata.

Gardner nacque nel 1914 a Tulsa, Oklahoma; il padre era un geologo nel campo del petrolio, sua madre era una fervente metodista. Martin da giovane fu un fondamentalista cristiano, convinto che il papa fosse l'anticristo e che il Secondo Avvento fosse imminente; a Chicago durante gli studi universitari divenne progressivamente disilluso e si allontanò dalle religioni organizzate, pur rimanendo un teista. L'esistenza di Dio per lui non poteva essere che un atto di fede, del tutto inconoscibile con la ragione: forse anche per questo motivo avversò sempre le pseudoscienze, tanto che il primo libro da lui scritto, *Fads and Fallacies in the Name of Science*, era un atto di accusa contro sette e simili e nel 1976 fu uno dei fondatori del CSISOP, il Committee for Skeptical Inquiry di cui il CICAP è il capitolo italiano. Nel frattempo si era laureato in filosofia: ma non essendo portato per l'insegnamento si reinventò come giornalista scientifico, tranne l'intervallo di quattro anni passato nella marina USA durante la seconda guerra mondiale e ulteriori studi successivi grazie a una borsa di studio per veterani di guerra.

La sua carriera sembrava inesorabilmente fallita, tanto che nei primi anni '50 – nel frattempo si era sposato con Charlotte, sua compagna di vita per mezzo secolo – accettò un posto di redattore per la rivista per bambini *Humpty Dumpty's Magazine*. Tutto cambiò quasi per caso nel 1956: uno dei suoi hobby era la prestidigitazione, e a un incontro di maghi gli venne mostrato un esaflexagono. Gardner pensò che gli sarebbe stato possibile scrivere un articolo e venderlo allo *Scientific American*, con cui aveva già collaborato in passato: l'editor della rivista non solo accettò l'articolo, ma gli chiese se pensava ci fosse stato materiale a sufficienza per una rubrica regolare.

Gardner rispose che pensava di sì, pur non avendo alcuna idea a proposito: non aveva nessun libro di matematica in casa! Iniziò ad andare alla caccia di libri di matematica ricreativa, che a dire il vero in quegli anni praticamente non esistevano, e si accinse all'opera. A gennaio 1957 apparve il primo articolo della rubrica "Mathematical Games", titolo inventato dalla redazione, e il resto è storia: venticinque anni

di rubrica, che hanno portato alla scrittura di quindici dei settanta libri della sua produzione. Come scrissi, Gardner non aveva una formazione matematica, e si può dire che si è fatto le ossa negli anni, affinando sempre più le sue conoscenze; ma soprattutto il suo grande contributo fu lo sdoganamento della matematica ricreativa, e la possibilità per molti matematici di professione di pubblicare i propri risultati non troppo accademici, rendendoli contemporaneamente noti al pubblico. Inoltre Gardner era una persona davvero splendida, a detta di tutti coloro che l'hanno conosciuto, e con cui scambiava una fitta corrispondenza... cartacea, con lettere battute a macchina ed eventualmente corrette a mano. I Gathering For Gardner sono incontri a cadenza biennale in suo onore, dove i suoi amici si ritrovano per parlare di magia, matematica e misteri.

Ma Gardner non è stato solo giochi matematici: tenne una rubrica di giochi “fantamatematici” nella *Isaac Asimov's Science Fiction Magazine* e una contro la pseudoscienza, “Notes of a Fringe-Watcher”, per il CSISOP. Ha anche preparato edizioni annotate delle opere di Lewis Carroll – oltre che dei racconti di Padre Brown! – e scritto saggi filosofici e un romanzo semiautobiografico, *The Flight of Peter Fromm*. Una carriera davvero incredibile e a tutto tondo. Un'ultima curiosità: a Martin Gardner è stato dedicato l'asteroide 2587 Gardner... anche se lui, esperto anche in giochi di parole – a ottobre 2010 è uscito il suo libro postumo *The Colossal Book of Wordplay* – avrebbe fatto notare che l'anagramma di ASTRONOMERS è NO MORE STARS...

(25 maggio 2010)

13. Storia dell'infinito

Il concetto di infinito in matematica è sempre stato trattato con le molle, già dai greci; non ci si sentiva a proprio agio con i paradossi relativi, e il grande traguardo degli analisti del XIX secolo fu di eliminarlo. Poi, però...

Dell'infinito si può parlare all'infinito, mi sa. E non è detto che ci si riesca a mettere d'accordo. D'altro canto, ho sempre dei dubbi che degli esseri finiti come noi possano effettivamente concepire l'infinito: ma qui scivoliamo nella filosofia che non è esattamente il mio forte. Prima di parlare dell'infinito usato in matematica negli ultimi 120 anni, penso però che sia utile vedere come ci si approcciava in passato.

Egizi e babilonesi, ma nemmeno maya, indiani e cinesi, non hanno mai avuto problemi con l'infinito, perché non lo concepivano neppure. Loro risolvevano problemi, e i problemi usano numeri finiti. Vorreste mica calcolare l'area di un campo con un lato infinito? I primi a parlare dell'infinito in matematica (e in filosofia) sono stati i greci, e anche loro hanno fatto di tutto per evitarlo: non per nulla nemmeno i loro dei sono onnipotenti. Ma come, dirà qualcuno, Euclide non mette addirittura come postulato che la retta è infinita? Per nulla: il testo originale dice che una retta può essere prolungata secondo necessità. Insomma, nelle costruzioni geometriche si usano solamente segmenti di lunghezza finita, come del resto in effetti succede. Anche il famigerato quinto postulato, quello delle parallele, non parla affatto di parallele! La formulazione euclidea afferma che, date due rette e una terza che le tagli entrambe, *prolungando* le due rette esse si incontreranno dal lato in cui la terza forma con loro due angoli la cui somma è meno di due angoli retti. Tutto questo si può riassumere dicendo che i greci usano solo l'**infinito potenziale**: cioè si possa far crescere a piacere una quantità pur rimanendo sempre belli ancorati a un valore finito.

D'altra parte, un approccio conservativo di questo tipo ha il suo senso: come più di un millennio e mezzo dopo Galileo ha fatto notare nel suo *Dialogo sopra i massimi sistemi*, i numeri quadrati come 1, 4, 9, 16, ... sono solo una piccola parte dei numeri positivi; ma possiamo mettere i due insiemi in corrispondenza biunivoca e quindi sembrerebbe che siano in realtà uguali. Come fare per evitare paradossi di questo tipo? Si vieta di usare l'infinito, tanto all'atto pratico non ci serve. Un modo un po' riduttivo di operare, ma che comunque ha i suoi punti di forza.

Il piccolo guaio è che non bisogna mai dire a un matematico – o a un essere umano in generale, se per questo – che qualcosa è vietato, perché ci si mette subito a giocare. Pochi decenni dopo Galileo, le serie infinite entrano prepotentemente in gioco, con i matematici dell'epoca (James Gregory e nientemeno che Leibniz stesso) che scoprono ad esempio che la somma infinita $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - ...$ è pari a $\pi/4$; e tirano fuori risultati così carini che non se ne può proprio fare a meno. Eulero è stato il vero campione, e maneggiava le serie infinite come un giocoliere, usando tutti i trucchetti formali di manipolazione

algebrica. Poi magari gli venivano fuori risultati un po' strampalati: partendo dalla divisione $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$ e sostituendo a x il valore 2 otteneva $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ...$ il che non suona così bene.

Eulero se la cavava dicendo «ma tanto io faccio questi conti per applicarli alla fisica: se il risultato non ha senso vuol dire che è da buttare via», e lo stesso facevano i primi analisti quando si arrampicavano sugli specchi spiegando perché nel calcolo delle derivate l'incremento non era zero – altrimenti si otteneva una divisione della forma 0/0 che non aveva senso – però dopo aver semplificato l'espressione ed eliminato il rischio della divisione indeterminata si cambiava idea e si diceva che l'incremento in effetti valeva zero. Ma la matematica va avanti così: ogni tanto c'è il momento in cui si parte per la tangente :-) senza preoccuparsi troppo della correttezza formale del tutto, ogni tanto ci si ferma e si rimette tutto bene a posto. Per l'analisi matematica alla fine si sono inventati tutti gli epsilon e i delta da usare nelle definizioni; per le serie infinite si sono studiati i criteri di convergenza per eliminare i casi che non funzionano.

Insomma, tutto sembrava relativamente tranquillo: come ai tempi di Euclide (e Aristotele) l'infinito esiste, ma noi non lo tocchiamo e quindi facciamo finta che non ci sia. Poi arrivò Georg Cantor e le cose non furono più come prima: ma quella è un'altra storia, e quindi ve la racconterò la prossima volta.

(28 maggio 2010)

14. Il paradosso delle circonferenze

Come dimostrare con tutti i crismi della grafica che π è uguale a 2 (o forse a 1: con i paradossi non si riesce mai ad avere una risposta precisa, mi sa)

Quando si parla di paradosso in matematica ci possono essere due casi distinti. Il primo tipo, come quello che abbiamo visto nel post numero 9 con il paradosso di Berry, è un'affermazione logicamente inconsistente; il significato pratico è che c'è qualcosa che non va nelle nostre definizioni. Il secondo tipo di paradosso si dovrebbe etichettare più accuratamente come fallacia; si fa una specie di gioco di prestigio, nascondendo un errore matematico in quella che appare come una dimostrazione in piena regola ma che porta a un risultato assurdo. Eccovi un esempio del secondo tipo.
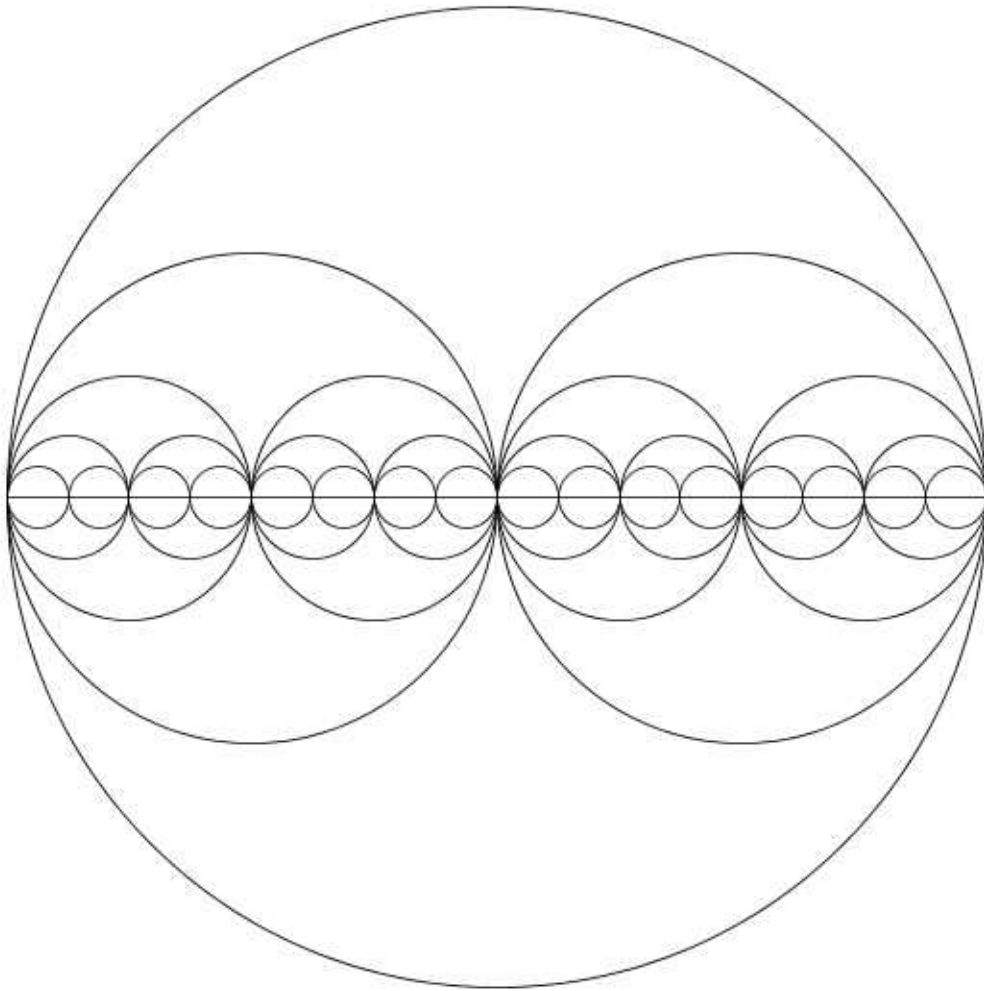
Figura 14.1: tante circonferenze che diventano un diametro

Supponiamo che la circonferenza grande qui sopra abbia raggio 1: questo significa che la circonferenza misurerà 2π, o se preferite 6 virgola 28 e qualcosa. Se costruiamo due circonferenze più piccole dello stesso raggio sul diametro della circonferenza grande, il loro raggio sarà evidentemente 1/2; ciascuna

circonferenza sarà pertanto lunga $2\pi\cdot(1/2)$ cioè π, e la lunghezza totale delle circonferenze sarà 2π, esattamente come quella singola iniziale; anche il diametro totale sarà sempre 2. Come potete immaginare, le quattro circonferenzine al passo due avranno come lunghezza totale 2π, e via discorrendo: a ogni passo la lunghezza totale delle circonferenze sarà sempre 2π, e il diametro totale 2.

Ma andando all'infinito, cosa che non ho fatto nel disegno perché sennò sporcavo tutto, le circonferenzine saranno sempre più vicine al diametro fino a che si confonderanno con esso. Quindi la lunghezza totale sarà pari al diametro, cioè 2; o meglio, visto che abbiamo unificato i punti in alto e quelli in basso delle circonferenze, bisognerebbe contare il diametro in entrambi i sensi, e quindi ottenere come limite della lunghezza complessiva delle circonferenzine 4. In ogni caso il diametro totale resta pari a 2; quindi nella prima ipotesi abbiamo che $2\pi = 2$, e quindi $\pi = 1$, e nella seconda $2\pi = 4$, da cui $\pi = 2$. Cosa c'è che non funziona?

La **mia** soluzione al paradosso è la seguente. Per come la vedo io, il problema non è tanto quello del passaggio al limite; nella situazione all'infinito, infatti, abbiamo infinite circonferenze puntiformi e infiniti diametri puntiformi, da qui non si scappa. Il punto fondamentale è nell'assunzione che facciamo implicitamente, che cioè si possa calcolare (un matematico direbbe “misurare”) la somma di un numero infinito di elementi. Nella *teoria della misura* questo è in genere lecito se il numero di elementi è finito o al più infinito sì ma numerabile (nel post numero 19 vedremo che cosa significa “numerabile”); in questo caso, invece, il numero di punti presenti è più che numerabile e quindi non è definita la loro somma.

Tutto qua: detto in altro modo, bisogna sempre tener presente quando e come si applicano le regole.

(31 maggio 2010)

15. Numeri a caso

Il Corsera in versione cartacea mostra come si possono aggiungere numeri a caso senza che nessuno si preoccupi. Fortunatamente la versione online è migliore.

Il 31 maggio 2010 il *Corriere della Sera*, come gli altri quotidiani italiani, ha lasciato ampio spazio alla relazione del governatore di Bankitalia. Tra le varie considerazioni sulla manovra emanata dal governo, Draghi ha anche parlato dei gravi problemi legati all'evasione dell'IVA. Il virgolettato dice che «si può valutare che tra il 2005 e il 2008 sia stato evaso il 30% della base imponibile Iva, che in termini di gettito significano oltre 30 miliardi l'anno, 2 punti di Pil».

Nulla da eccepire su questi numeri: una rapida ricerca mi ha fatto trovare che il gettito lordo IVA 2007 è stato di 122 miliardi, e la stima del 30% di evasione porta appunto a due punti percentuali abbondanti di PIL. L'articolo sul giornale però prosegue con la frase – non virgolettata, quindi immagino sintesi del giornalista – *«Se l'Iva fosse stata pagata, aggiunge Draghi, l'Italia avrebbe uno dei rapporti debito-Pil più bassi d'Europa. Attorno al 60% del Pil invece del 115,8%. Non sarebbe cioè necessaria alcuna manovra.»*. Tra il 2005 e il 2008 ci sono quattro anni: due per quattro fa otto; ma 115 meno otto non fa 60, e nemmeno ci va vicino. Sì, qualcuno potrebbe dire che l'evasione non c'è stata solo in questi quattro anni, e tornare indietro fino agli allegri anni Ottanta per far tornare i conti: ma mi sembra un'interpretazione piuttosto forzata. Se prendiamo per buona la ricostruzione del Sole-24 Ore, che afferma che c'è stata un'aggiunta a braccio con Draghi che ha sottolineato come avremmo potuto avere un rapporto debito/Pil «tra i più bassi della Ue» senza aggiungere cifre, si direbbe che il giornalista abbia voluto strafare e mettere un numero magggico, senza rendersi esattamente conto di quello che diceva. Meglio a questo punto la versione online del Corsera, che non riporta per nulla la frase incriminata.

Per completezza, a cosa corrisponde in pratica tutta quest'IVA? I 122 miliardi citati sopra, facendo la divisione del mezzo pollo di Trilussa, sono 2000 euro l'anno a testa; ma probabilmente ha più senso calcolarli rispetto al PIL e scoprire così che quasi un mese l'anno del nostro reddito serve a pagare il valore aggiunto sui beni e servizi che acquistiamo (oltre a una decina di giorni in cui non ci facciamo dare la ricevuta...)

(3 giugno 2010)

16. L'albergo di Hilbert

Dopo che i matematici avevano fatto tutto quanto in loro potere per nascondere l'infinito sotto il tappeto, Georg Cantor prese la questione di petto e provò a usarlo come un'entità a pieno titolo.

A metà del diciannovesimo secolo i matematici avevano trovato un metodo di addomesticare l'infinito, evitando accuratamente di arrivarci: gli infinitesimi dell'analisi matematica erano eliminati in un tripudio di delta ed epsilon, così come le serie infinite venivano viste come un insieme di troncamenti sempre più in là. La matematica sembrava ormai stabilizzata, e Leopold Kronecker si beava affermando che «i numeri interi sono stati creati da Dio, tutto il resto è opera dell'uomo». Ma non bisogna mai fidarsi dei tedeschi quando decidono di prendere le cose alla lettera!

Ricordate che Galileo aveva affermato che non si poteva parlare di un “numero uguale a infinito”, perché si giungeva al paradosso che era uguale a una sua parte propria? Bene: Georg Cantor – che aveva le sue buone ragioni per lavorare con i numeri infiniti: voleva infatti trovare un modo per vedere se uno sviluppo in serie di Fourier di una funzione convergesse alla funzione di partenza oppure no – partì proprio da questa affermazione e **definì** un insieme infinito proprio in questo modo. Tra l'altro, la cosa curiosa è che oggidì la definizione usuale di insieme finito è ”un insieme che non è infinito”, giusto per mostrare come non sia affatto semplice dare definizioni di base in questo campo. Forse questa definizione vi sembrerà normale, il che significa che questo secolo abbondante non è passato invano. C'è infatti dietro di essa un cambio di paradigma, come direbbero i filosofi! Per la prima volta non parliamo di infinito potenziale come i greci e gli analisti dell'Ottocento, né di infinito formale come Eulero e i primi analisti, ma abbiamo un infinito **attuale**, qualcosa che possiamo toccare con mano – si fa per dire, d'accordo. Però Cantor ha anche pensato a un modo per indicarlo: avendo ormai terminato le lettere latine e quelle greche, è passato a quelle ebraiche e ha indicato con $\aleph_0$ – si legge alef-zero – il numero infinito che indica quanti sono i numeri interi. Più precisamente $\aleph_0$ è la **cardinalità** di un insieme che può essere messo in corrispondenza biunivoca con i numeri interi, che cioè è **numerabile**; c'è l'elemento 1, il 2, il 3, e via contando.

Naturalmente non basta buttar giù una definizione per avere qualcosa di utile: occorre che la definizione non sia incoerente, e che permetta di tirare fuori qualcosa di inaspettato. Questa definizione di infinito in efetti porta a conseguenze interessanti, come quella che dal nome dell'altro matematico tedesco David Hilbert (che affermò «Nessuno ci scaccerà dal paradiso che Cantor ci ha procurato»...) prende il nome di *Albergo di Hilbert*. L'albergo di Hilbert ha un numero infinito di stanze, tutte numerate da 1 in su: è un posto molto gettonato, e una sera tutte le sue stanze sono occupate. (No, non c'è bisogno di fare chissà quale strada per arrivare alla vostra camera; le stanze sono infatti messe su una curva di Peano, quindi ci sono tante scorciatoie per raggiungere ad esempio la stanza numero 12345678901234567890.) Quella

sera arriva però un'ospite (con l'apostrofo, sì) senza prenotazione; il direttore dell'albergo non si scompone, accende il microfono per il sistema di informazioni e avvisa i signori ospiti che si devono spostare nella camera col numero successivo; 1 → 2, 2 → 3, 999999 → 1000000 e così via. Le tariffe dell'albergo di Hilbert sono in effetti economiche, ma prevedono l'obbligo di dover cambiare stanza nel caso la direzione ne ravvisi la necessità.

La stanza 1 rimane così libera e la chiave viene consegnata alla nuova ospite. Fuori di metafora, non solo abbiamo dimostrato che $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, ma abbiamo anche trovato una corrispondenza biunivoca esplicita tra un insieme di $\aleph_0$ elementi e uno di $\aleph_0$+1. Attenzione! l'"addizione" con i numeri infiniti non segue le regole a cui siamo abituati; ad esempio non possiamo semplificare i due $\aleph_0$ e ottenere 1=0. Usare l'infinito attuale richiede insomma di cambiare tutta una serie di regole, bisogna essere flessibili. Anche la definizione di uguaglianza è un po' diversa: perché due insiemi A e B abbiano la stessa cardinalità non è necessario trovare una corrispondenza biunivoca, come ho scritto sopra, ma esiste un teorema (di Cantor-Bernstein) che ci assicura che basta dimostrare che A può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di B e B può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di A.

Ma l'albergo di Hilbert non si limita a trovare posto per uno o centomila nuovi arrivati! Una settimana dopo, ad albergo di nuovo pieno, giunge infatti all'albergo un pullman contenente un numero infinito (numerabile) di turisti. Il direttore dà loro un'occhiata distratta, torna al microfono e comunica ai signori ospiti di spostarsi dalla stanza *n* alla stanza 2*n*. In questo modo rimangono libere tutte le stanze di numero dispari, che sono infinite; anche questa volta tutti i nuovi arrivati si possono accomodare senza problemi. In formule, abbiamo appena dimostrato che $2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. La vera apoteosi si raggiunge quando per assistere alla finale dell'Infinity Cup arrivarono infiniti (numerabili) pullman, ciascuno con infiniti (numerabili) turisti! Questa volta il direttore si gratta per qualche minuto la testa, poi sorride, canticchia tra sé «nema problema!», prepara un disegno – mostrato qui sotto – e lo manda sugli schermi tv di tutte le stanze dell'albergo.
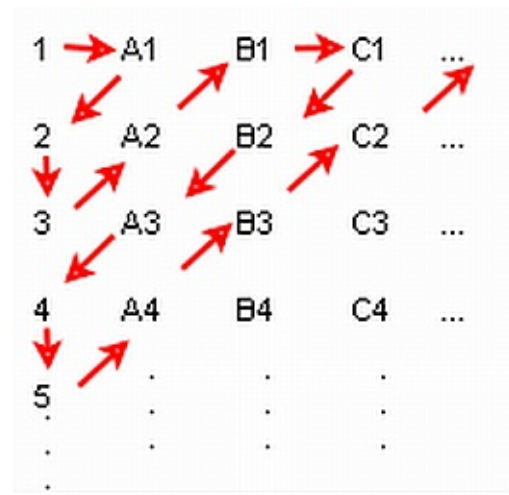
Figura 16.1: come ordinare le coppie di interi

Le colonne del disegno rappresentano gli ospiti originari (1, 2, 3, ...) e i turisti nei vari pullman (A1, A2, A3... per il primo, B1, B2, B3, ... per il secondo, e così via). Abbiamo insomma un quadrato che si estende indefinitamente in due direzioni. Il colpo di genio del direttore dell'albergo è di mettersi a contare i presenti non per lungo o per largo, ma *in diagonale*. In effetti qui abbiamo un metodo bustrofedico, che cioè scorre alternativamente nelle due direzioni; ma è solo perché il direttore non aveva voglia di fare freccette troppo lunghe nel disegno da mandare ai vari ospiti. Il ragionamento comunque è simile: per prima cosa si trova un sistema per pesare i vari punti, in questo caso associando a ciascuno di essi un singolo numero pari alla somma delle sue coordinate cartesiane. Per ciascun valore si ha un numero finito di punti associati ad esso, e quindi è possibile ordinarli man mano, ottenendo ancora una volta un insieme numerabile. In formule, abbiamo dimostrato come $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

A vedere questa nuova aritmetica, si direbbe che non c'è poi chissà quale divertimento ad avere aggiunto $\aleph_0$; le operazioni che si possono fare con esso sono piuttosto banali. Ma Cantor si accorse, e soprattutto dimostrò, che ci sono infiniti “più infiniti” di $\aleph_0$... come vedremo nel post numero 19.

(4 giugno 2010)

17. Per amor di precisione

Non sempre ha senso scrivere troppe cifre di un numero che avete misurato. Ecco qualche consiglio pratico.

C'è una vecchia barzelletta su un custode in un museo di paleontologia che mostra con orgoglio il reperto più importante, affermando «È vecchio di tre milioni e quattro anni!» Un giorno un visitatore gli chiede come fa ad essere così preciso sulla sua datazione, e lui risponde «Semplicissimo: io lavoro qua da quattro anni, e quando sono arrivato il reperto aveva tre milioni di anni...»

Spero che la battuta vi abbia almeno fatto sorridere; ma quello che ci sta dietro è una cosa molto seria. Mettiamola così: la matematica è la quintessenza della precisione, ma non è affatto detto che la precisione serva sempre, o addirittura non sia perniciosa. Ci sono indubbiamente moltissimi casi in cui la precisione è d'obbligo, per esempio quando si redige il bilancio di un'azienda; evitate di fare come me, che al rogito per comprare la casa mi sono accorto che avevo sbagliato a fare i conti e sommando l'importo dei vari bonifici e assegni circolari mancavano dieci euro per la somma pattuita. (Per la cronaca, nel rogito è indicato che dieci euro sono stati pagati in contanti). La maggior parte delle volte, però, possiamo tranquillamente fare a meno di portarci in giro tutte quelle cifre, limitandoci a mantenere quelle che sono davvero importanti.

Capire quali sono le cifre davvero importanti in uno specifico contesto non è una cosa automatica, il che vuol dire in pratica che noi siamo più bravi dei computer a fare queste cose: ma naturalmente dobbiamo prima capire cosa dobbiamo fare, e come spesso capita ci occorre un po' di terminologia. I matematici hanno una parola per (quasi) tutto, e in questo caso ci sono addirittura due espressioni che fanno al nostro caso: **numero di cifre significative** e **ordine di grandezza**.

Il concetto di cifre significative non nasce dalla matematica ma dalla fisica: quando si fa una misurazione sono le cifre di cui possiamo essere certi. Per fare un esempio banale, prendiamo un righello e misuriamo la lunghezza di una busta. Troveremo per esempio che la lunghezza è di 15 centimetri, 4 millimetri e un pezzetto; possiamo anche stimare che il pezzetto misuri 6 decimi di millimetro, o 61 centesimi di millimetro, ma se possiamo usare solo il righello non ne siamo certi. Dunque anche se scriviamo che la nostra busta è lunga 15,461 centimetri in realtà solo le prime tre cifre hanno senso, e cioè sono significative.

L'ordine di grandezza è un po' più ostico, ma lo potete visualizzare con una calcolatrice elettronica, purché usi la notazione scientifica. Se il display della calcolatrice ha otto cifre e voi moltiplicate 4000000 per sé stesso, il risultato che vedrete sul display sarà 1.6E13, che è un'abbreviazione per $1{,}6\times10^{13}$. Bene: l'ordine di grandezza del risultato è 10^{13}. In un certo senso indicare l'ordine di grandezza

può essere visto come l'usare zero cifre significative: non mi importa più *quali* cifre ci siano, ma solo *quante* ce ne sono.

Bene: quando si usa l'ordine di grandezza? Quante sono le cifre significative da usare? La risposta più precisa è “dipende”. Sicuramente non potete usare più cifre significative di quante ne potete misurare, come nell'esempio sopra. Se state facendo una misurazione ufficiale, metterete tutte le cifre possibili, e probabilmente indicherete anche l'errore che può esserci; o con un simbolo +/− e l'errore massimo, oppure come fanno i fisici che dicono per esempio che la massa a riposo di un elettrone è 9,109 382 6(16)$\cdot 10^{-31}$ kg, o almeno quello era il valore considerato quando ho scritto questo post. Le cifre tra parentesi sono quelle di cui non si è certi. Ma in genere vi conviene arrotondare a una cifra più tonda, tenendovi una o due, massimo tre, cifre di precisione. L'equatore terrestre per esempio è lungo 40075,0 km; notate tra l'altro che il “virgola 0” che ci dice che le cifre significative sono 6 e che è solo un caso che l'ultima sia uno zero. Ma in pratica dire 40000 km è più che sufficiente! L'ordine di grandezza invece si usa nel caso si debbano fare dei conti spannometrici. Se vogliamo stimare il numero di chilometri percorsi a piedi in un anno dagli italiani, non vale la pena assumere che i nostri concittadini sono 60 milioni (due cifre significative, almeno adesso; se poi il numero di abitanti sarà più vicino a 59 o 61 milioni allora di cifra significativa ce ne sarà una sola); fare i conti con 10^8 (100 milioni) è più che sufficiente.

Spero di non avervi reso ancora più confusi: il modo migliore di capire come usare le approssimazioni è metterle in pratica. Dopo un po' di allenamento, potreste stupire i vostri amici sciorinando stime su stime!

(8 giugno 2010)

18. Un'immagine nasconde più di cento parole

L'infografica è molto utile per avere un'idea di qualcosa con una singola occhiata. Però sbagliare – volontariamente o no – il disegno può portare a impressioni totalmente errate.

In questi anni è diventato di moda usare la cosiddetta *infografica*; prendere cioè una serie di dati numerici e rappresentarli con un disegno, in modo tale che il lettore possa farsi immediatamente un'idea di quello che sta dietro. L'idea non è affatto stupida, e permette una comprensione migliore dei dati, specialmente quando sono in gioco numeri molto grandi che sono sempre difficili da visualizzare.
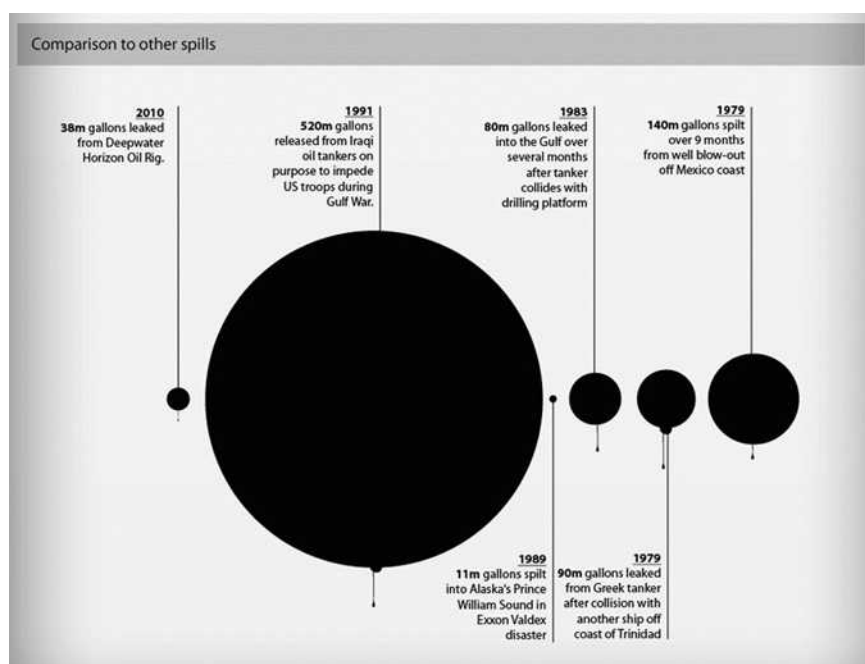
Figura 18.1: come nascondere le dimensioni

Ma proprio a causa della semplicità dell'infografica possono verificarsi distorsioni tali da far passare un messaggio esattamente opposto a quello reale. Prendiamo per esempio [questa pagina di iglucruise.com,]() che racconta – anzi raffigura – la successione temporale degli eventi nel disastro ecologico della piattaforma BP nel golfo del Messico. Il disegno qui sopra mostra la quantità di petrolio disperso fino all'inizio di questa settimana, e lo confronta con quello corrispondente ad altri eventi nefasti. Uno sguardo rapido al disegno fa pensare che in fin dei conti la perdita non è poi così elevata; ad esempio nella prima guerra del Golfo, l'esempio più vicino, il risultato finale era stato molto peggiore. Sì, qualche stupido ambientalista potrebbe controbattere che tanto quello era stato bruciato e finito nel deserto, mentre qua stiamo parlando di distruzione di un ecosistema; però quelle sono solo fisime, perché i numeri parlano chiaro. O no?

In effetti non è esattamente così. Come quelli di Cosmic Variance hanno opportunamente mostrato, il

disegno ha un piccolo problema. Il rapporto tra le varie perdite (38 milioni di barili nel 2010, 520 milioni nel 1991) corrisponde al rapporto **tra i diametri** dei rispettivi cerchi. Peccato che in un cerchio, a differenza che in una barra, il rapporto da considerare è quello **delle aree**; insomma, un diametro doppio corrisponde a un'area quadrupla, e non certo doppia. Nella figura sotto ho disegnato i cerchi secondo il rapporto corretto: come potete vedere, il rapporto percepito è molto meno estremo di quanto riportato da iglucruise.com.
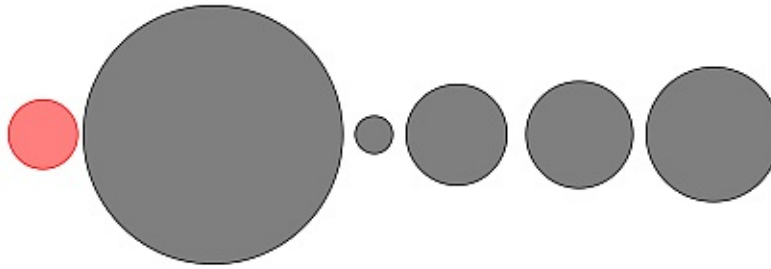
Figura 18.2: l'infografica a dimensioni corrette

Nel caso vi chiedeste «ma cosa sarebbe successo se l'infografica fosse stata fatta a barre e non a cerchi? Non ci sarebbe comunque stata tutta quella differenza?» la mia risposta è che una superficie è il modo corretto di indicare questo tipo di misura, proprio perché il petrolio si distribuisce su una superficie; tanto che l'esempio canonico per capire quanto petrolio c'è in giro è il sito If It Was My Home, che mostra la chiazza nera e permette di posizionarla sopra una qualunque città del mondo grazie a Google Maps. Certo, dato che le barre hanno la stessa base, il rapporto tra le altezze corrisponderebbe esattamente al rapporto tra le superfici; però il cervello del lettore vede una barra come una semplice linea, e quindi si ricadrebbe nell'errore iniziale. Resta da capire se questo errore nella rappresentazione fosse voluto oppure no; non saprei nemmeno dire quale sia l'opzione peggiore, perché almeno nel primo caso si può parlare di malizia ed essere pronti a fare la tara su quanto pubblicato dal sito, mentre non avere presente la differenza tra una rappresentazione come linea e una come superficie rende tutta l'infografica sostanzialmente inutile.

(9 giugno 2010)

19. Ci sono infiniti "più infiniti"!

Il metodo diagonale di Cantor mostra che ci sono diversi tipi di infiniti, e ne costruisce esplicitamente uno, se si ha una pazienza infinita. Ma non tutti sono d'accordo che la cosa sia lecita!

Abbiamo visto nel post numero 16 come la cardinalità dell'insieme dei numeri interi, quella indicata come $\aleph_0$, è anche quella di insiemi che a prima vista sembrano ben più grandi; costruendo un percorso in diagonale simile a quello che nell'albergo di Hilbert ha permesso al direttore di trovare una camera per ciascuno degli infiniti passeggeri degli infiniti pullman arrivati tutti insieme si può dimostrare ad esempio che i numeri razionali hanno la stessa cardinalità degli interi, nonostante in un segmento piccolo quanto vogliamo ce ne sono... beh, infiniti.

Ma forse sapete già come va avanti la storia: a un certo punto Cantor rimase sconcertato nello scoprire che i numeri reali sono "più infiniti" dei razionali! Insomma, ci sono dei casi in cui anche il direttore dell'albergo di Hilbert dovrebbe rassegnarsi e dire ai nuovi arrivati «mi spiace, non posso trovare una camera per ognuno di voi». La dimostrazione di Cantor, una volta che ci si è abituati a ragionare con l'infinito attuale, è davvero semplice, e vale la pena presentarla per esteso. Per la precisione dimostreremo che i numeri reali nell'intervallo tra 0 e 1 non sono numerabili: detto in altre parole, in qualunque modo noi tentiamo di mettere in una lista ordinata i numeri, ce ne sfugge sempre qualcuno. Il problema non è che tra due numeri reali ne possiamo sempre trovare infiniti altri; quello succede anche con i razionali, ma abbiamo visto che basta ordinarli in un modo diverso e siamo sicuri di trovarli tutti.

0,00000000...
0,14159265...
0,23571113...
0,10101010...
0,98765432...
0,11235813...
0,42424242...
0,77272277...
....

0,77272272...

Figura 19.1: procedimento diagonale di Cantor

La dimostrazione di Cantor è per assurdo: lui suppone che sia possibile scrivere una lista x_1, x_2, x_3, ... che comprenda tutti i numeri reali tra 0 e 1, e mostra che data una qualunque lista di questo tipo possiamo trovare un numero che sicuramente in quella lista non c'è. Per prima cosa, come si scrivono i numeri reali? Giusto pochi anni prima, Richard Dedekind – collega e amico di Cantor – aveva trovato un modo formale per farlo. Un numero reale è dato dalla successione infinita delle sue cifre decimali, come dire che π è 3,14159265358979... Immaginando di poter scrivere infinite cifre, resta solo un piccolo problema, visto che 0,999999.... e 1,000000... rappresentano lo stesso numero; per convenzione possiamo scegliere una delle due rappresentazioni possibili, o se preferiamo possiamo metterle entrambe nel nostro listone, che tanto male non fa. Una volta scritta questa lista infinita di numeri nel formato 0,*abcdefg*... costruiamo un nuovo numero con la seguente regola. Il numero inizia con 0 virgola, come tutti gli altri; la sua *n*-sima cifra decimale è ricavata dall'*n*-sima cifra decimale dell'*n*-simo numero della lista in questo modo; se quella cifra è compresa tra 0 e 4 allora scriviamo 7, mentre se è compresa tra 5 e 9 scriviamo 2. Il numero così ottenuto è per costruzione diverso da ciascuno degli altri numeri per almeno una cifra; abbiamo così trovato un numero tra 0 e 1 che non fa parte della lista. Né vale dire «allora aggiungiamo questo nuovo numero da qualche parte», oppure «rimescoliamo la nostra lista iniziale»; ribadisco che **per ogni** lista L siamo in grado di trovare un numero k_L fuori dalla lista stessa. L'indice L sta a significare che il numero che troviamo dipende dalla lista scelta, giusto per completezza.

Cantor dimostrò anche che l'**insieme delle parti** di un insieme ha sempre cardinalità strettamente maggiore dell'insieme di partenza. Dato un insieme J, l'insieme delle parti di J è l'insieme P(J) (a volte indicato anche come 2^J, il perché lo vedremo subito) i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di J; se ad esempio J è {0,1,2} allora P(J) ha come elementi {}, {0}, {1}, {2}, {0,1}, {0,2}, {1,2}, {0,1,2}. Detto in altro modo: se ho *n* pastelli colorati e voglio contrassegnare dei fogli in modo che nessuna coppia abbia esattamente gli stessi colori, posso contrassegnare 2^n fogli distinti. Il risultato di Cantor mostra che ci sono infiniti numeri infiniti; l'insieme dei numeri reali ha in effetti la cardinalità dell'insieme delle parti dei numeri interi, e Cantor chiamò tale cardinalità **c**. Se non sbaglio dovrebbe essere una c minuscola gotica, anche se oggi la si trova di solito scritta come una c in grassetto; la lettera non è l'iniziale del suo cognome ma della parola *continuum*, visto che i numeri reali sono “continui” nella retta dei numeri.

La dimostrazione qui sopra (chiamata **metodo diagonale di Cantor**) è stata riciclata svariate volte nel corso del ventesimo secolo, e ritengo sia una delle pochissime dimostrazioni veramente fondamentali nella storia della matematica. Eppure non è stata affatto subito accettata dalla comunità dei matematici. Il suo più strenuo oppositore fu Leopold Kronecker, che definì Cantor «ciarlatano scientifico», «rinnegato» e «corruttore della gioventù»; anche Poincaré non ebbe certo parole di elogio per questo tipo di procedimenti. Persino dopo lo sdoganamento definitivo da parte di Hilbert rimase sempre una piccola corrente che non ritiene valido il ragionamento cantoriano. La ragione di tale atteggiamento è

essenzialmente filosofica, e ha anche un suo fondamento: noi non possiamo scrivere effettivamente una lista infinita, quindi per i matematici che seguono queste correnti tutta la dimostrazione cade miseramente. Tali correnti (costruttivismo, intuizionismo, finitismo) hanno come dicevo un certo numero di seguaci; la maggior parte dei matematici però non si cura di queste cose, e basta loro poter lavorare in santa pace.

D'altra parte anche il cristianissimo Cantor aveva dei dubbi su cosa aveva effettivamente scoperto; la storia che scrisse in Vaticano per fugare i suoi dubbi e vedersi risposto dai gesuiti che andava tutto bene purché definisse i numeri da lui trovati “transfiniti” e non “infiniti” è una bufala, ma è vero che ebbe uno scambio di lettere con vari filosofi e teologi, e scrisse anche una lettera a papa Leone XIII (che non rispose). Queste diatribe e l'impossibilità di ottenere una cattedra universitaria più importante – e meglio pagata – di quella di Halle anche a causa dell'ostracismo di Kronecker lo fecero cadere in crisi depressive, forse legate al disturbo bipolare, e mistiche sempre più forti, tanto che pensò anche di essere stato scelto da Dio per divulgare al mondo la teoria dei transfiniti. Anche la sua salute fisica peggiorò, e morì povero in un sanatorio nel 1918.

Però la storia di Cantor e dei numeri transfiniti non è tutta qua; ma ne parlerò nel post numero 29.

(11 giugno 2010)

20. Le discese ardite e le risalite

La produzione industriale italiana sta notevolmente risalendo; non che fosse difficile, visto quanto era scesa in basso. Ma questo non significa che sia ai suoi massimi, come scrivono i giornali!

Innanzitutto un applauso a Phastidio.net, che è stato il primo – e a quanto ne so io l'unico – a segnalare la cosa. Perché mentre nel caso delle intercettazioni il modo migliore per non farle conoscere è creare una legge ad hoc, nel caso dell'economia ci si può permettere il lusso di spiattellare numeri su numeri e nascondere perfettamente cosa sta effettivamente capitando. Stavolta il punto dolente su cui buona parte dell'italico giornalismo si è accartocciato è l'incredibile (in tutti i sensi...) crescita della produzione industriale ad aprile 2010.

Giovedì scorso è stata pubblicata la stima Istat rivista per il PIL nel primo trimestre (cresciuto dello 0,4%, leggermente meno di quanto si pensasse) e quella della produzione industriale nell'aprile 2010. L'indice destagionalizzato relativo (quello che cioè cerca di eliminare le fluttuazioni dovute ai diversi giorni lavorativi dei vari mesi e il fatto che per esempio ad agosto in Italia non si lavora) ha segnato un aumento dell'1% rispetto a marzo e un aumento tendenziale del 7,8% rispetto all'aprile 2009. Cos'è un aumento tendenziale? Una percentuale di crescita, quindi un dato in relazione a un valore di partenza. Un aumento tendenziale del 3% partendo da una base di 100 unità, ad esempio, è molto meglio di un aumento tendenziale del 10% partendo da una base di 20 unità; nel primo caso abbiamo tre unità in più, nel secondo solo 2. E come ricorderete il 2009 fu disastroso per la nostra produzione industriale, con picchi (tendenziali) del 25% in meno rispetto all'anno precedente. Phastidio.net mette un link ai dati Istat e mostra come il valore per aprile 2010 sia 85.7, calcolato su una media di 100 per il 2005. Ad aprile 2009 tale valore era in effetti 79.5, e quindi c'è stata una risalita; ma ad aprile 2008 era 106.7, prima della picchiata causa crisi. Insomma è numericamente vero che l'incremento di aprile è il più alto dal dicembre 2000, ma non è esattamente una cosa di cui vantarsi. E che fanno i nostri giornali?

Il Corriere della Sera tace, e quindi non sbaglia. Il Giornale e Il Sole-24 Ore, con un'inconsueta comunanza a meno di una virgola che i primi eliminano, iniziano entrambi l'articolo con «Cresce la produzione industriale, ai massimi da fine 2000» (Come abbiamo visto, siamo un bel po' sotto i massimi, stiamo solo crescendo più di prima aiutati dal fatto che avevamo toccato il fondo). Però non è una questione di affiliazioni politiche, visto che la snumerazione da noi è assolutamente bipartitica. Repubblica infatti già nel titolo dell'articolo esulta: «Produzione industriale, aprile boom»; il massimo è però raggiunto della Stampa, che nel titolo del suo articolo ci dice «Ma l'industria vola al top dal 2000». Purtroppo mi sa che il top della disinformazione numerica non sia ancora stato raggiunto; chissà quale sarà la prossima topica.

(12 giugno 2010)

21. Passeggiate casuali

Come scoprire qual è il modo migliore per ritrovarsi in un centro commerciale senza usare il telefonino, e perché invece E.T. era destinato a perdersi.

È venerdì notte, praticamente sabato mattina. Siete certi di non avere affatto bevuto un po' troppo. Solo che non capite bene come mai vi trovate su una passerella del molo, una passerella tra l'altro piuttosto stretta che vi permette di andare solo avanti o indietro. Vi incamminate verso la terraferma, ma siete così obnubilati che a ogni passo potete indifferentemente avanzare o tornare indietro. Ce la farete a raggiungere la terraferma, farete un bagno non molto salutare ma che almeno vi rinfrescherà un po' le idee, oppure rimarrete a passeggiare su e giù per la passerella finché non vi passerà la sbornia?
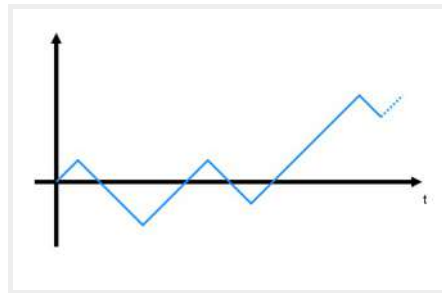
Figura 21.1: grafico nel tempo per una passeggiata casuale

La marcia dell'ubriaco è un esempio tipico di **passeggiata casuale** su una retta. In maniera meno cruenta la si può ottenere lanciando una moneta equa, segnando +1 tutte le volte che esce testa e -1 quando invece esce croce, e vedendo la successione di somme parziali che appare. Nel disegno qui sopra vediamo un possibile risultato dell'esperimento dipanato nel tempo; l'asse orizzontale indica appunto il tempo trascorso, mentre quello verticale mostra la posizione in cui ci si trova nei vari istanti. Per ovvie ragioni di simmetria (come dicono sempre i fisici) capiamo subito che lo spostamento medio dall'origine dopo un certo numero di lanci è nullo, il che è la stessa cosa che dire che in un gioco equo in media non si vince né si perde nulla. Se però consideriamo la **distanza** media dall'origine, le cose cambiano eccome. Il teorema del limite centrale afferma infatti che dopo n lanci essa è proporzionale a $\sqrt{n}$ (la costante di proporzionalità è circa 0,8, per la cronaca). Anche se la cosa sembra paradossale, non lo è affatto; lo spostamento è una media tra i casi in cui si è andati in una direzione e quelli in cui si è scelta quella opposta, ma per calcolare la distanza si deve invece prendere il valore assoluto dello scostamento, che per definizione è sempre positivo.

Questo risultato porta a un paio di corollari molto interessanti. Innanzitutto, se si ha sufficiente tempo a disposizione, si possono toccare tutti i punti (discreti, quelli cioè corrispondenti ai numeri interi) della retta che si sta percorrendo; anzi, li si toccherà tutti un numero infinito di volte. Ma questo significa anche

che giocando al casinò un gioco perfettamente equo abbastanza a lungo – non che di questi giochi se ne trovino, ma non sottilizziamo – finiremo quasi certamente al verde! Infatti il nostro capitale iniziale è molto inferiore a quello del banco, e quindi è molto probabile che ci capiterà di arrivare prima al punto in cui abbiamo perso tutto il nostro capitale – e quindi la possibilità di continuare a giocare – rispetto a quello in cui è il banco a saltare.
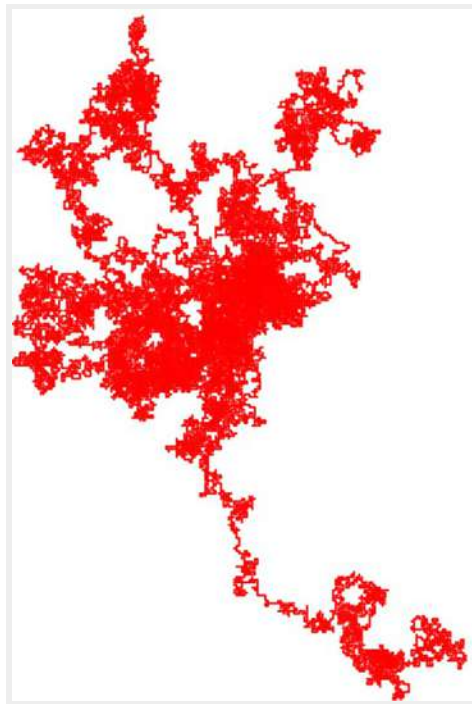
Figura 21.2: passeggiata casuale in due dimensioni, da Wikipedia

Cosa succede quando si passa a più dimensioni, immaginando che gli spostamenti possano essere solo ortogonali (oltre che avanti/indietro si possa fare sinistra/destra, alto/basso, o chissà dove nella quarta dimensione; ma dirigersi a nord-ovest è vietato)? Il percorso del nostro ubriaco diventa naturalmente molto più variegato; se il passo è molto piccolo assomiglia a un moto browniano, o se siete dei tipi più artistici a un movimento frattale, soprattutto nel caso tridimensionale. La figura sopra, tratta da Wikipedia, mostra un esempio di passeggiata casuale in due dimensioni. La cosa divertente è che nel caso del piano si è ancora "praticamente certi" (nel senso probabilistico, la probabilità è cioè 1) di tornare prima o poi all'origine, ma passando a tre dimensioni la cosa cambia completamente, e si tornerà all'origine circa una volta ogni tre (il 34,05%, per i pignoli). Detto in altro modo, E.T. poteva effettivamente essersi perso nello spazio, mentre quando uno perde di vista l'amico in un centro commerciale e non ha con sé il telefonino la soluzione migliore per ritrovarsi non è lanciarsi alla caccia ma stare tranquillo ad aspettare che sia l'altro a trovarvi... sempre ammesso che il vostro compagno non abbia anch'egli letto questo post e non intenda seguire la stessa strategia.

(15 giugno 2010)

22. Vuvuzela o cara

A quanto sembra la vera protagonista dei mondiali di calcio 2010 è questa specie di trombetta di plastica. È davvero impossibile eliminarla dalle telecronache?

Io non mi sono mai interessato di calcio. Il mio primo ricordo dei mondiali è un giretto per le strade sotto casa nel '70 durante il primo tempo di Brasile-Italia, con qualcuno che diceva che Boninsegna aveva pareggiato; da qui potete capire che ormai ho una certa età e che una volta era molto più sicuro anche per un bimbetto uscire di casa anche dopo cena, almeno finché c'era luce. Però nemmeno allora potevo sfuggire alle chiacchiere altrui al riguardo, e quindi ora so più o meno tutto sulla vuvuzela; una specie di trombetta di plastica tipica del Sudafrica, che emette una singola nota a un volume incredibilmente alto – dicono 116 decibel a un metro di distanza, anche se la cosa mi puzza di bufala. Sicuramente però, quando viene suonata da decine di migliaia di persone tutte assieme, rende impossibile ascoltare la telecronaca di una partita, a meno di eliminare del tutto il rumore di fondo della folla allo stadio, togliendo (almeno immagino) buona parte del fascino di una partita.

Nell'attesa che la FIFA decida se vietare le vuvuzela, cosa che non credo succederà, vediamo di capire cosa si può fare per attenuarne il suono. Il concetto di base è che quella trombetta, come scrivevo, emette un'unica nota a una frequenza ben specifica: 233 Hertz, un si bemolle sotto il do centrale del pianoforte. Questa frequenza è abbastanza simile a quella base di una voce maschile, e quindi si sovrappone a quella dei telecronisti, rendendo le cose più difficili; ma non è tutto qui. Tanto per dire, in una telefonata quella frequenza non verrebbe nemmeno trasmessa, visto che si usano frequenze tra i 300 e i 3400 Hz, ma non si dovrebbero neppure udire le voci maschili, allora! Il fatto è che la nostra voce, come anche le note emesse da uno strumento, non sono formate da un'unica frequenza ma da una combinazione di frequenze diverse. Già i pitagorici avevano scoperto che suonare due corde dello stesso spessore ma di lunghezza una la metà dell'altra aumentava la nostra percezione del suono; quando si è sviluppata la teoria delle onde sonore si è capito come la ragione di questa sensazione è l'avere i **nodi** delle onde, cioè i punti in cui la forma d'onda ha valore zero, sovrapposti. Un'onda sonora fondamentale ha la forma di una **sinusoide**, una funzione del tipo $\sin(x)$ che poi assomiglia alle onde che disegniamo da bambini; una frequenza di 233 Hertz significa che in un secondo ci sono 233 picchi. Ma ogni nota di ogni strumento musicale non corrisponde mai a una sinusoide pura; il timbro di uno strumento è dato da tutte le altre frequenze che risuonano insieme. Le frequenze che compaiono con maggior intensità, per quanto detto sopra, sono quelle **multiple** della fondamentale; in teoria musicale si chiamano gli **armonici**.

Fin qui la teoria. Ma in pratica? Sono subito apparse decine di app per iPhone – gratuite o a pagamento – che affermano di riuscire a eliminare il suono delle vuvuzela. Il metodo usato è lo stesso della cancellazione d'eco; se si emettono contemporaneamente due suoni della stessa frequenza, uno dei quali

ha un ritardo di mezza lunghezza d'onda, le onde sonore si annullano a vicenda. In pratica è come quando due persone si alternano a prendere e posare un mattone: il risultato finale è che a terra c'è sempre un mattone. Il problema è che queste cose funzionano bene per una singola persona, visto che le due onde sonore partono da punti diversi, e soprattutto se il volume delle vuvuzela è sempre costante, cosa che mi pare non capiti: insomma, probabilmente non vale la pena di spendere soldi. Chi ascolta la partita al PC può invece cercare un filtro tagliabanda; si tolgono dall'output sonoro solo le frequenze corrispondenti ai 233 Hertz e agli armonici, lasciando tutte le altre. È un po' come usare Photoshop per togliere tutte le macchioline dall'immagine di una pagina di testo sporca di inchiostro; si può essere sfortunati e avere una macchia proprio sopra una lettera, ma in generale il testo dovrebbe ancora essere comprensibile. Peccato che sembra che la gente non sia d'accordo su quali siano gli armonici da togliere; AfterDawn ritiene che basti togliere solo le frequenze corrispondenti ai si bemolle nelle varie ottave, mentre New Scientist suggerisce di togliere tutti gli armonici, ma senza andare a frequenze troppo alte. Bisognerebbe sperimentare, mi sa.

Il tutto mostra come sia vero che la matematica non serva a nulla per fare previsioni pratiche, ma non è che la fisica se la passi poi così meglio; quello che possiamo fare sono dei modelli, ma il risultato finale deve essere sempre confrontato con la dura realtà, prima di finire come nella barzelletta del metodo per vincere alle corse dei cavalli.

(16 giugno 2010)

23. Proprio tutti intercettati?

Non sempre si possono fare le moltiplicazioni per arrivare al risultato finale di un prodotto; occorre prima verificare se non dobbiamo eliminare i doppioni.

Silvio Berlusconi, in una delle millanta sue interviste a proposito della poi defunta legge sulle intercettazioni, ha affermato che ogni anno in Italia vengono intercettate 150.000 persone; se ciascuna di esse parla con 50 persone, ha continuato, significa che ci sono 7 milioni e mezzo di italiani che vengono spiati. Riuscite a scoprire la fallacia logica nel ragionamento del nostro PresConsMin?

I numeri snocciolati da Berlusconi li possiamo prendere per buoni; il CSM ha affermato che le utenze intercettate sono 132.384, e fare cifra tonda non è certo un dramma – ma vedi in fondo. Non tutti sono Luciano Moggi che alzerebbe sicuramente il numero dei contattati, ma si puo immaginare che gli intercettati non siano degli eremiti che hanno fatto un voto di silenzio, quindi possiamo anche prendere per buona la stima di 50 contatti per intercettato. Quello che però il premier non ha preso in considerazione è che questi contatti **non sono tutti distinti!**. Già solo se noi estraessimo il codice fiscale di un cittadino italiano a caso e rifacessimo l'estrazione per sette milioni e mezzo di volte (tra l'altro, avete notato la differenza con «estraiamo a sorte sette milioni e mezzi di nominativi»?) ci sarebbero molti sfortunati che comparirebbero più di una volta nella lista; ma in questo caso è presumibile che gli intercettati siano gruppi di persone con forti legami tra di loro, e quindi il numero totale degli spiati si riduce notevolmente.

Per avere un'idea più visibile di cosa succede vi propongo il “paradosso degli antenati”. Ognuno di noi ha avuto due genitori, quattro nonni, otto bisnonni e così via. Tenendoci larghi e contando tre generazioni per secolo, dalla nascita di Cristo a oggi sono passate 60 generazioni: il numero di nostri bis-bis-bis...-avoli sarebbe 2 elevato alla sessantesima potenza, qualcosa come cento miliardi di miliardi. Ma dove stava tutta quella gente sulla Terra? Magari Roberto Giacobbo ci saprebbe dire qualcosa in una futura puntata di *Voyager*? Forse ancora più semplice è la proposta di piccoglio: in Italia ci sono circa 70 milioni di telefonini. Moltiplicando questo numero per i cinquanta contatti a testa otteniamo tre miliardi e mezzo di persone. Insomma, solo noi italiani parliamo con metà della popolazione terrestre?

Più seriamente, il procedimento usato è simile a quello delle catene di sant'Antonio, anche nella versione di spam finanziario “Make Money Fast”, nelle forme dello “schema Ponzi” o del marketing piramidale. In questi schemi chi entra nella catena, oltre che pagare chi sta più in alto, deve propagarla a un certo numero di persone i cui discendenti pagheranno lui. Che succede? Chi inizia la catena ci guadagna, o almeno non ci perde, per definizione; i primi a entrare in gioco hanno una qualche possibilità di guadagnare a loro volta; ma man mano che la catena si espande sarà sempre più difficile, e in pochi passi addirittura impossibile, trovare nuovi adepti. Per fare un conto numerico: se la catena deve essere

propagata a cinque persone, al quattordicesimo passo coinvolgerebbe tutta la popolazione della terra. E se anche ci limitassimo a due persone nuove per volta, i passi necessari sarebbero trentatré.

La morale è semplice: è vero che per ottenere un prodotto basta moltiplicare i due numeri dati, ma non è detto che quella sia la risposta corretta. La matematica offre un modello, ma il senso pratico deve verificare se il modello è applicabile alla situazione specifica. Un ultimo punto metodologico: non è affatto detto che a ogni *utenza* intercettata corrisponda una *persona* distinta. Per quanto ne sappiamo, una persona può avere più di un telefonino; si avrebbe lo stesso errore di cui sopra, anche se immagino che in questo caso i numeri siano molto minori e quindi possiamo tralasciare questa componente di errore.

(17 giugno 2010)

24. I test INVALSI

Non vedo nulla di male nella formulazione dei problemi di matematica per i test INVALSI. In fin dei conti, la matematica non è solo saper fare le operazioni, ma capire quale sia il modello da applicare al mondo reale.

Dopo aver letto sul Post alcuni esempi di prove INVALSI 2010 per gli studenti di terza media, il mio giudizio fondamentale è «beh, che c'è di male?» D'accordo, c'è tutto un mondo dietro di cui non so nulla e che potrebbe cambiare completamente le cose: mi limito a notare la formulazione dei problemi e a farci su qualche considerazione.

So bene che i test non sono certo il sistema perfetto per valutare le conoscenze di una persona: rimane sempre il dubbio che lo studente abbia il "panico da crocetta". Nonostante tutto è però il modo più asettico per cercare di valutare **tutta** la popolazione scolastica italiana in maniera omogenea; per il voto finale agli esami spero che gli orali abbiano la giusta importanza. Le domande riportate nell'articolo, a parte la quarta che mi ricorda i problemi che davano a scuola ai miei tempi, cercano non solo di vedere se lo studente sa fare i conti, ma anche se riesce a capire **quali sono** i conti che deve fare. Questo sì che è importante, ed è quello che la matematica dovrebbe in prima battuta essere; un modo per modellare la realtà. Poi ci sono i matematici astratti che studiano i modelli in quanto tali, d'accordo; ma in ogni campo dello scibile umano ci sono le punte più avanzate e poi tutto il resto della truppa.

Prendiamo ad esempio la terza domanda:

> Il prezzo p (in euro) di una padella dipende dal suo diametro d (in cm) secondo la seguente formula: $p = 1/15\ d^2$.
> Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa:
> A. Il prezzo della padella è direttamente proporzionale al suo diametro.
> B. Il prezzo della padella aumenta all'aumentare del suo diametro.
> C. Il rapporto fra il diametro della padella e il suo prezzo è di 15.

Quello che in pratica si vuole capire è se il ragazzo ha chiaro il concetto di proporzionalità, e se ha capito che non sempre la proporzionalità è diretta; detto in altro modo, la (A) e la (C) sono false, mentre (B) è vera. (Se siete in tanti ad aver sbagliato il test, avvisatemi, ché sarà meglio che parli della proporzionalità...) Lo stesso vale per la prima domanda: probabilmente non ci capiterà mai di prendere una cartina, misurare la distanza tra due punti e ricavare la loro distanza in linea d'aria; ma qui non è importante saper fare la moltiplicazione – per quello c'è comunque la calcolatrice – bensì sapere cosa significano i numerini nel rapporto di scala. Voi che ne pensate?

(21 giugno 2010)

25. Il tennis è un gioco iniquo

Nel calcio, nel basket, e in tanti altri sport chi fa più punti vince. Nel tennis non è necessariamente così, ma si può vincere anche con molti punti in meno: più di quanto vi potreste aspettare.

Mentre scrivevo questo post, a Wimbledon stavano aspettando che si riprenda per la seconda volta il match tra John Isner e Nicolas Mahut. Il problema per una volta non è stata la pioggia: alla fine della seconda giornata di gioco, l'incontro era infatti stato di nuovo sospeso per oscurità, mentre i due maratoneti si trovavano sul... 59 pari. Un punteggio cestistico più che tennistico, che entrerà dritto dritto nel Guinness dei primati per non uscirne probabilmente mai più. (Per i curiosi: alla fine la vittoria è andata a Isner, e l'ultimo set finì 70-68) Sono parecchi gli sport che almeno in linea di principio possono produrre una partita infinita: si pensi a una finale di calcio dove le due squadre arrivano ai rigori e continuano a segnarli o farseli parare in simultanea. Il tennis però ha una peculiarità: in casi patologici come questo il vincitore finale potrebbe avere messo a segno molti meno punti dell'altro.

Nel calcio, nel basket, e in tanti altri sport non ci sono di questi problemi: chi fa più punti vince. Il tennis, come e peggio della pallavolo, è fatto in modo che non si giochi una singola partita ma un certo numero di esse, i set; nel tennis anche ogni set è una partita multipla, composta da vari giochi. Questo significa che è possibile per un giocatore vincere l'incontro mettendo a segno molti meno punti dell'avversario: basta che nei giochi e nei set che perde l'altro faccia sempre cappotto, mentre in quelli che vince l'altro faccia comunque il massimo dei punti.

Facciamo un po' di conti. Un gioco lo si può vincere a zero, il che significa 4 punti a zero. Se perdiamo i primi due set 0-6 0-6, l'avversario parte con una dote di 48 punti a zero. I giochi si vincono con almeno due punti di differenza, quindi 4-2 (da 40-30 si fa il punto decisivo), 5-3 (da 40 pari, vantaggio e gioco), 6-4 e così via. Qual è il punteggio più favorevole? Se la differenza tra i due elementi da sommare ai punteggi è costante e in direzione opposta a quella di partenza, come nel nostro caso, conviene aggiungere la più piccola, per non inquinare troppo il risultato. Avete tre possibilità per convincervi che funziona così: fare i conti, fidarvi di me oppure notare come andando all'infinito il rapporto tra i punti fatti dai due giocatori tenda a 1 ed estrapolare il comportamento con pochi punti. Per quanto riguarda i set, il ragionamento è simile, ma occorre stare attenti e verificare quale punteggio finale tra 6-4 e 7-6 (con il tie break finito 7-5) sia meglio. Nel primo caso si può arrivare a vincere il set con 24 punti contro 28; nel secondo con 31 punti contro 41, che è sicuramente meglio per il nostro record. Quindi se terzo e quarto set finiscono 7-6 (7-5) 7-6 (7-5) siamo a 62 punti contro 130. Resta il quinto set: visto che a Wimbledon – a differenza degli altri tornei – sul 5-5 si va avanti a oltranza finché qualcuno riesce a fare due giochi più dell'altro, per il nostro record ci conviene fermarci sul 6-4 e terminare l'incontro vincenti, pur avendo fatto solo 86 punti contro 158.

Insomma, nel caso più eclatante si può vincere un incontro a Wimbledon facendo poco più della metà dei punti dell'avversario. Non è certo il caso della partita tra Isner e Mahut, dove posso immaginare che i punti totali, oltre a essere troppi, siano più o meno equamente distribuiti; però i poveri produttori di libri statistici possono appellarsi a questo tipo di conteggi per sperare di trovare qualcosa di nuovo nei prossimi anni!

Un ultimo problemino "tennistico". Il tabellone di Wimbledon parte con 128 giocatori: ci sono quindi 64 partite al primo turno, 32 al secondo e così via dimezzando fino alla finalissima. Immaginiamo però che per un ricorso all'equivalente britannico del TAR capiti che un anno bisogna far spazio ad altri cinque tennisti che si erano rivolti al tribunale per far valere i propri diritti contro l'illegale prevaricazione dell'organizzazione. Come si può organizzare il calendario per minimizzare il numero di partite da giocare? La risposta la trovate in appendice.

(24 giugno 2010)

26. Quadrato (?) nel cubo

Un problema matematico di per sé semplice, ma con alcuni punti a cui stare bene attenti.

Proporre un problema matematico – peggio, di geometria! – si direbbe un'inutile tortura. Il problema in questione, però, è interessante perché può essere risolto in maniera pedestre, se non addirittura erronea, se non lo si considera attentamente. Volete cimentarvici?
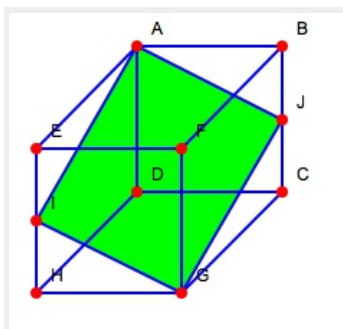
Figura 26.1: qual è l'area di AJGI?

Nel cubo qui sopra – che non è disegnato in scala! – i vertici A e G sono diagonalmente opposti, mentre I e J sono i punti di mezzo degli spigoli EH e BC. Il volume del cubo è 64 centimetri cubi. Qual è l'area del quadrilatero AJGI?

Il quadrilatero sembra un rettangolo, ma come ho detto il disegno non è stato fatto in scala apposta per confondere le idee. La seconda cosa da ricordare è che usare troppe volte il teorema di Pitagora permette sicuramente di risolvere il problema, ma come ben sapete potrebbe nuocere gravemente alla salute. Come aiutino finale – ma non disperate, in appendice c'è la soluzione! – vi consiglio di chiedervi che razza di triangolo è AJI; la cosa potrebbe aiutarvi anzichenò.

Segnalo infine che ho scopiazzato il problema da SAT Math Blog, un nuovo blog di un vecchio amante della divulgazione matematica. Se siete davvero bloccati, qualche aiutino ve lo dà anche lui :-)

(Ah, lo sapete che si può affettare un cubo per ottenere un esagono? In appendice c'è anche la risposta a questo problema)

(25 giugno 2010)

27. Cancella la vuvuzela

La trasformata di Fourier è uno strumento potentissimo per cambiare le frequenze relative di un'onda sonora; e nel mondo digitale abbiamo la possibilità di farla anche in fretta!

Quando ho parlato delle vuvuzela, ho commentato come sia facile per un'emittente televisiva eliminare le frequenze emesse dalle trombette, ma non ho specificato nemmeno a grandi linee come si può fare. La magia che permette di fare tutto questo è la **trasformata di Fourier**, insieme alla sua sorella digitale FFT.

Joseph Fourier è stato un matematico e fisico francese vissuto a cavallo del 1800; il suo campo di studi fondamentale era l'equazione del calore, cioè come varia nel tempo la temperatura di un corpo a cui viene applicata una fonte di calore. Come praticamente tutta la scuola matematica francese di quel periodo, Fourier era spinto da considerazioni militari; in questo caso la "fonte di calore" sembra che fosse quella ottenuta facendo sparare un cannone, che dopo ogni colpo si doveva raffreddare prima che lo si potesse usare di nuovo.

Fourier considerava quindi una superficie metallica, e sapeva risolvere l'equazione del calore se la fonte di calore si comportava come un'onda sinusoidale. La sua prima idea è stata notare come se si sommavano due o più sinusoidi diverse era ancora possibile trovare la soluzione della sua equazione, semplicemente sommando le soluzioni; la sua seconda e più importante idea fu scoprire che ogni funzione periodica poteva essere espressa come somma (magari infinita) di sinusoidi, e che quindi aveva trovato la soluzione definitiva.

Figura 27.1:
approssimazioni di

un'onda quadra (da
Wikipedia)

Proprio **ogni** funzione periodica? Beh, dipende da cosa definiamo per “funzione”. Dal punto di vista di un ingegnere, la risposta è «sì». Qualunque roba si trovi in pratica, la si può scrivere come quella che viene oggi chiamata *serie di Fourier*. Dal punto di vista di un matematico, la risposta è «no». Un matematico specializzato in analisi ti tirerà fuori millanta esempi di funzioni patologiche che non possono essere espresse in serie di Fourier, e si fregherà le mani ogni volta. Dal punto di vista di un fisico, la risposta è «all well-behaved functions». La definizione di «funzione che si comporta bene» è grosso modo «qualcosa per cui valgano i teoremi che ci interessano in pratica»; non dev'essere necessariamente una funzione, se si rende periodica la delta di Dirac (di cui magari una volta parlerò...) va bene lo stesso, ma il risultato pratico è appunto che se facciamo le cose sul serio e non scherziamo allora la risposta è «sì».

E la *trasformata* di Fourier? Ora ci arriviamo. La serie di Fourier dice che per ogni funzione periodica possiamo calcolare quali sono le frequenze, tutte multiple di una frequenza base che corrisponde al periodo della funzione stessa, che la compongono. Se immaginiamo che il periodo sia infinito, cioè si abbia una funziona qualunque, avremo anche un numero infinito di frequenze, ciascuna con la propria intensità; questo viene chiamato lo **spettro** della funzione. La trasformata di Fourier è un marchingegno matematico che permette di trasformare una funzione che varia nel tempo in una funzione che varia **nelle frequenze**; tecnicamente si dice che «si passa dal dominio del tempo a quello delle frequenze». Il bello è che si può poi fare l'operazione inversa: l'antitrasformata di Fourier (che è praticamente identica, a meno di una costante moltiplicativa) riporta la funzione dal dominio delle frequenze a quello del tempo.

La vuvuzela fa un suono che fondamentalmente è musicale, quindi periodico almeno fino a quando il vuvuzelante ha fiato, e quindi il suo spettro avrà dei picchi ben definiti sulle frequenze fondamentali: per eliminare il suono basta fare una trasformata di Fourier, modificare la funzione togliendo quei picchi, e poi rifare l'antitrasformata. Sì, mi direte, ma come si fanno queste modifiche? Non ci crederete, ma non solo esiste una trasformata di Fourier nel caso di una funzione discreta e non continua, ma c'è anche un algoritmo molto efficiente per calcolarla; la **FFT**, vale a dire la Fast Fourier Transform. Visto che ormai i file audio sono creati in formato digitale, il lavoro da fare è relativamente semplice, e infatti si sono messi in molti a creare i filtri necessari per dare un po' di requie alle orecchie degli ascoltatori.

Un'ultima curiosità: l'algoritmo della FFT è del 1965, di J.W. Cooley e John Tukey. Ma secondo Wikipedia sembra che il primo ad averlo usato sia stato... Carl Friederich Gauss, che aveva bisogno di fare calcoli astronomici senza dover fare una quantità astronomica di conti. Poi uno si chiede perché certa gente la si trova sempre tra i piedi.

(28 giugno 2010)

28. Brancher e la logica

Dall'intervista al ministro temporaneo per il non-si-sa-ben-cosa un esempio di come la logica matematica non faccia ancora parte della cultura di base.

Lo so, parlare del ministro temporaneo per il non-si-sa-ben-cosa Aldo Brancher è un po' come sparare sulla Croce Rossa; però in questo caso lo prendo solo come spunto per parlare di un problema di logica matematica, o meglio di mancata conoscenza della logica proposizionale. Sto parlando della sua frase, pronunciata in un'intervista al TG3, «L'Italia dopo che ha perso i mondiali se l'è presa con me».

Partiamo dal principio: in molti sono convinti che le vittorie dell'Italia ai mondiali di calcio siano utili per il governo in carica – qualunque esso sia – che ha la possibilità di far passare provvedimenti diciamo "delicati" senza che l'opinione pubblica dia loro troppo peso. Se l'affermazione X è «L'Italia vince i mondiali» e l'affermazione Y è «nessuno si occupa di Brancher», il risultato in termini di logica matematica è

[1] $X \rightarrow Y$

che si legge "X implica Y". Accettiamo ora per ipotesi che **tale implicazione** sia vera: attenzione, perché noi non stiamo dicendo nulla sulla verità o meno delle singole affermazioni X e Y, ma solo su come si possono correttamente combinare; lo spiego meglio sotto. Quello che Brancher ha detto si può scrivere come

[2] (NON X) → (NON Y)

dove un vero logico userebbe un segno apposta come ¬ al posto del NON: ma noi non siamo così fiscali. Bene: molti pensano che [1] e [2] siano equivalenti, ma questo non è affatto vero!

Quando si usano i cosiddetti *connettori logici* (AND, OR, NOT, e →) e non si è ancora esperti, è meglio iniziare a scrivere la **tabella di verità**, che per ogni combinazione di verità o falsità delle affermazioni costituenti mostra verità e falsità dell'affermazione congiunta. Nel nostro caso abbiamo questa tabella:

X	**Y**	**X → Y**
V	V	V
V	F	*F*
F	V	V
F	F	V

Qualcuno si potrebbe stupire che negli ultimi due casi, quelli in cui la prima affermazione sia falsa,

l'implicazione sia invece vera. Nel Medioevo si diceva «ex falso quodlibet», cioè «da una cosa falsa si può ottenere quello che si vuole»; se non siete convinti della cosa pensate a una frase tipo «quando piove, Anna va in ufficio in macchina». Se vi chiedeste «quando piove, Anna va in ufficio in bicicletta?» la risposta è no, quindi l'implicazione è falsa; ma se non piove non abbiamo idea di sapere se Anna va in macchina o in bicicletta, quindi nessuna delle due implicazioni è falsa, e pertanto sono entrambe vere (nella logica standard un'affermazione o è vera o è falsa, non la si scampa).

Ma questo a sua volta significa che (X → Y) e ((NON X) → (NON Y)) non possono essere la stessa cosa, perché se (NON X) è vero allora X è falso, e quindi, come visto sopra, può succedere di tutto. Detto in altri termini, è possibile che gli italiani se la siano presi con il povero neoministro perché l'Italia ha perso i mondiali, ma nulla nel mondo della logica vieta che pur con la nazionale buttata fuori con ignominia Brancher continuasse a rimanere ignorato. La sua, insomma, è una semplice scusa senza fondamento logico... occhei, forse pretendere che un politico sia logico è un po' troppo, avete ragione.

Per i curiosi, l'affermazione (X → Y) è la stessa cosa di ((NON Y) → (NON X)), come potete verificare da voi calcolando la tabella di verità. Nel caso di Anna, cioè, tutto quello di cui siamo certi è che se va in ufficio in bicicletta allora non piove; se va in macchina non si sa.

(28 giugno 2010)

29. L'ipotesi del continuo

La teoria degli infiniti è molto carina, almeno per un matematico; peccato che abbia dei buchi logici ineliminabili. Non è nemmeno possibile sapere se esiste o no un infinito maggiore dei numeri interi ma minore dei numeri reali.

Abbiamo visto nel post 19 come Georg Cantor abbia scoperto che la cardinalità (il "numero") dei reali sia maggiore di quella degli interi. Per la precisione lo dimostrò per i numeri reali tra 0 e 1, ma è abbastanza facile vedere come non è che prendendo tutti i reali ce ne siano poi di più. Nel caso ve lo foste chiesti, i punti del piano, o se per questo di uno spazio con un numero qualunque di dimensioni, hanno sempre la cardinalità del continuo **c**. Però vi potrebbe essere venuto un altro dubbio: perché tanta fatica a cercare una nuova lettera, andando fino a pescare dall'alfabeto ebraico, e affermare che la cardinalità degli interi è $\aleph_0$, e subito dopo cambiare notazione? Ottima domanda.

Cantor era convintissimo che i reali avessero cardinalità $\aleph_1$, fossero cioè l'infinito "appena successivo" di quello dei numeri interi. Però era un matematico, e sapeva bene che un conto è essere convinti di un fatto e un altro conto dimostrarlo. Così mise un simbolo per così dire "provvisorio" per indicare la cardinalità dei reali, e si accinse a mostrare come fosse in realtà $\aleph_1$. Peccato che non ci riuscì, nonostante tutti i suoi sforzi. Né riuscì a trovare un insieme piu grande degli interi e più piccolo dei reali, il che sarebbe comunque stata una risposta valida, anche se indubbiamente meno elegante.

Il problema prese così il nome di **ipotesi del continuo**, CH in breve dall'inglese "Continuum Hypothesis"; nella sua formulazione canonica dice appunto che non c'è nessuna cardinalità strettamente compresa tra quella dei naturali e quella dei reali. Assumendo assieme ai soliti assiomi che caratterizzano i numeri anche l'**assioma della scelta** (prima o poi parlerò anche di quello) possiamo scrivere $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Esiste poi anche l'ipotesi *generalizzata* del continuo (in breve, GCH), che afferma che per ogni n si ha $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$, ma non mettiamo troppa carne al fuoco.

Hilbert, che come forse ricorderete era rimasto estasiato dalla scoperta dei numeri transfiniti, era talmente interessato dalla cosa che pose la dimostrazione dell'ipotesi del continuo come il primo dei suoi ventitré problemi, e quindi furono in molti i matematici che sbatterono la testa contro il problema. Il primo che riuscì a tirare fuori un qualche risultato al riguardo fu Kurt Gödel, quello del teorema di incompletezza; nel 1940 Gödel dimostrò che usando gli assiomi usuali nella teoria degli insiemi non si poteva dimostrare che l'ipotesi del continuo fosse falsa. Notate per favore il salto carpiato: non dice «è vera», non dice nemmeno «non è falsa», ma «non si può dimostrare che sia falsa». Se vi è venuto mal di testa avete tutta la mia comprensione. Ad ogni modo Gödel credeva che in effetti l'ipotesi del continuo fosse falsa e che gli assiomi che usiamo sono incompleti e cercò di trovare un sistema per affermare che i reali sono $\aleph_2$, ma si fermò qua. Nel 1963 Paul Cohen completò la dimostrazione, se di dimostrazione si

può parlare, facendo vedere come non si può nemmeno dimostrare che l'ipotesi sia vera. Insomma, sappiamo di non sapere; ma la situazione è diversa da quella di Socrate, visto che questo non può essere un punto di partenza. Tutto quello che possiamo dire è che ci sono svariati modelli che trattano gli infiniti, e non abbiamo nessuna possibilità di sceglierne uno come "er mejo".

Come ultima chicca, ci sono alcuni di questi modelli che hanno al loro interno i cosiddetti **cardinali inaccessibili**. Questi non sono alti prelati che non rispondono mai al telefono, ma numeri (infiniti) che non possono essere ricavati a partire dagli altri cardinali, e quindi devono essere postulati come assioma di fede. Chissà se Hilbert aveva pensato che anche nel paradiso dei matematici ci sarebbero state le schiere di angeli, arcangeli, cherubini, troni, dominazioni celesti e via discorrendo!

(2 luglio 2010)

30. Perelman, Poincaré e (Millennium) Prize

Un po' di informazioni sulla congettura di Poincaré e su cosa ha fatto Grigorij Perelman per dimostrarla.

Grigorij Perelman ha rifiutato il premio del Clay Institute per avere risolto la congettura di Poincaré. Più o meno è questa la notizia raccontata dalla Stampa, unico quotidiano italiano che si è ancora interessato alla cosa, aggiungendo poi qualche dettaglio gossipparo sulla vita di Perelman che sembra voler confermare la diceria che se uno è un matematico non ha tutte le rotelle a posto. Tanto per dire, se leggete l'articolo del New York Times c'è la notizia e poco più. Ma è possibile capire qualcosa in più senza spaccarsi la testa? Non so, però provo a semplificare al massimo la spiegazione dell'enunciato del teorema (sulla dimostrazione non metto becco: non saprei da dove partire...)

Giusto come antipasto: i Millennium Problems del Clay Institute sono sette "importanti problemi" della matematica (importanti almeno per quelli del Clay) a cui è associato un premio di un milione di dollari elargito a chi riuscirà a dimostrarli. Cent'anni prima David Hilbert aveva proposto i suoi 23 problemi, sempre con lo scopo di stimolare la ricerca matematica in quelle che a lui sembravano le linee più interessanti; col ventunesimo secolo il numero di problemi si è ridotto, e c'è stato bisogno dello sponsor per definirli. Come cambiano i tempi!
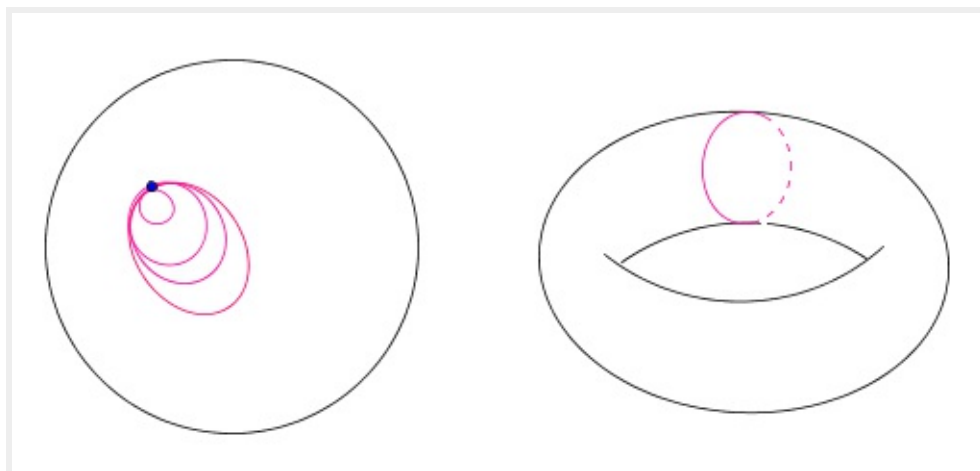
Figura 30.1: circuiti che si annullano e no

Henri Poincaré, probabilmente il più grande matematico e fisico a cavallo tra il diciannovesimo e il ventesimo secolo, aveva formulato la congettura che ora prende il suo nome mentre cercava di catalogare le varietà di dimensione 3. Una varietà è un qualcosa che se la guardi abbastanza da vicino assomiglia molto allo spazio ordinario; per fare un esempio semplice, la superficie di una sfera è una 2-varietà perché assomiglia localmente a un piano, come del resto (non) notiamo tutti i giorni vivendo sulla superficie terrestre. Ma anche la superficie di una ciambella (di un *toro*, come lo chiamano i matematici) è una 2-varietà: se noi fossimo un essere bidimensionale molto piccolo non potremmo mai accorgerci, guardando intorno a noi, se viviamo su un piano, sulla superficie di una sfera oppure su quella di un toro.

Tra l'altro, come avete certo notato, sia la superficie della sfera che quella del toro sono all'interno di uno spazio a tre dimensioni: in genere una varietà si trova sempre “immersa” in uno spazio più grande.

Poincaré aveva trovato un modo per distinguere una sfera da un toro: nel primo caso, un qualunque circuito disegnato sulla superficie (come si vede a sinistra nell'immagine) può essere “sgonfiato” fino a diventare un punto, mentre sul toro esistono dei circuiti (vedi a destra) che non possono mai essere sgonfiati. Più in generale, però, non è facile capire se ci sono buchi o no; per la cronaca, una varietà senza buchi si dice *semplicemente connessa*. Alla fine, Poincaré enunciò una congettura, vale a dire un'affermazione che secondo lui era vera ma che non era in grado di dimostrare:

> Ogni 3-varietà semplicemente connessa, senza bordi e compatta è omeomorfa a una 3-sfera

Cos'è un bordo dovrebbe essere intuitivo; per terminare la spiegazione dell'enunciato resta ancora da dire cosa significa *omeomorfo* (fondamentalmente, che è la stessa cosa a meno di bitorzoloni qua e là) e *compatto* (che una qualunque successione di punti non scappa dalla varietà nemmeno all'infinito; se prendessimo un cerchio senza il centro non andrebbe bene perché potremmo avvicinarci sempre più ad esso). Insomma, se una cosa assomiglia a una 3-sfera e ha alcune delle proprietà di una 3-sfera allora è una 3-sfera. Ricordatevi che una 3-sfera non è una sfera, ma qualcosa che sta dentro uno spazio a quattro dimensioni! Se il nostro universo fosse tale che viaggiando abbastanza a lungo in una qualunque dimensione si tornasse al punto di partenza, allora sarebbe una 3-sfera in uno spazio quadridimensionale (o pentadimensionale se consideriamo anche il tempo).

La cosa strana è che la congettura è stata generalizzata in un numero qualunque di dimensioni. No, non è strano che un matematico tenda a generalizzare. Lo strano è che in dimensione 1 e 2 dimostrarla è banale, in dimensioni maggiori di 4 è stata dimostrata vera tra il 1960 (Stephen Smale) e il 1966 (M.H.A. Newman), e in dimensione 4 da Michael Freedman nel 1982, ma il caso 3 continuava ad eludere i tentativi di dimostrazione. In pratica, quando le dimensioni sono poche non c'è spazio sufficiente per infilare dell'altro; quando sono tante c'è così tanto “spazio” che si riesce sempre a passare oltre gli ostacoli senza troppa fatica, ma in 4 e soprattutto in 3 dimensioni bisogna trovare lo “stretto” percorso corretto. Sia Smale che Freedman tra l'altro vinsero la Fields Medal per le loro dimostrazioni, come del resto anche Perelman che però la rifiutò; insomma per la comunità matematica tutto questo è davvero importante.

La dimostrazione di Perelman, pubblicata tra il 2002 e il 2003, parte dal lavoro di Richard Hamilton che pensò di applicare tecniche di fisica matematica (usate inizialmente per risolvere l'equazione del calore: non vi ricorda nulla?) e sfrutta il flusso di Ricci, chiamato così dal nome del matematico italiano Gregorio Ricci-Curbastro (toh, un omonimo di Perelman...), quello che aveva già fatto i conti che

sarebbero poi serviti ad Einstein per tirare fuori la teoria della relatività generale. La "dimostrazione" di Perelman è più che altro uno "sketch of proof", come dicevamo noi all'università; in questi anni ci sono stati vari gruppi di matematici che hanno riempito i salti logici, e adesso la comunità matematica ritiene che la dimostrazione sia completa. Solo che appunto il matematico russo non è d'accordo su come si fa matematica oggi, e rifiuta sistematicamente i premi... In questo caso la spiegazione ufficiale è che il comitato del premio avrebbe dovuto dividerlo tra lui e Hamilton, visto che la parte più importante (a detta di Perelman, nessuno in realtà ci crde) è dell'americano.

Chi volesse saperne di più può leggere uno di questi due libri divulgativi: *L'Enigma di Poincaré* di George G. Szpiro e *La congettura di Poincaré* di Donal O'Shea. Confesso di non averli nemmeno sfogliati, anche se sono stato a una conferenza di O'Shea che raccontava della congettura e della dimostrazione di Perelman; per quanto ne so, il primo è più gossipparo mentre il secondo entra più nel merito del teorema. Aggiungo come curiosità che Grigorij non è il primo matematico russo di nome Perelman; a metà del secolo scorso Yakov Perelman scrisse alcuni libri (*Algebra ricreativa*, *Geometria ricreativa*) di problemi e giochi matematici, che sono stati tradotti nella collana Sfide Matematiche e di cui non dovreste far fatica a trovare in rete la traduzione spagnola. Io li ho trovati carini, e sicuramente più facili da capirsi che la congettura di Poincaré!

(5 luglio 2010)

31. Paul, il terrore degli allibratori

Il polpo Paul sembra essere la vera star di questi mondiali, superando di gran lunga le vuvuzela e gli jabulani. Però non è che le sue prodezze siano poi così incredibili...

Non so se Roberto Giacobbo abbia già pensato di fare una puntata di Voyager su di lui; certo è che dopo l'ennesima corretta predizione, con la Spagna che ha fatto fuori la Germania nelle semifinali della Coppa del Mondo di calcio 2010, il polpo Paul è diventato un divo del paranormale praticamente ovunque – salvo forse in patria, dove i tifosi non avranno digerito l'ultima sua scelta. Cerchiamo però di capire se effettivamente le sue sono delle prodezze oppure no: magari ne vedremo delle belle.

Inizio con una storia non direttamente collegata a questa, ma che dovrebbe far capire di cosa stiamo parlando. Supponete di aver ricevuto una mail che vi prediceva il risultato di una partita delle eliminatorie, con la richiesta di non divulgare il fatto. Il risultato effettivamente si avvera; qualche giorno dopo vi arriva una nuova mail con un nuovo pronostico, anch'esso poi avveratosi, e così via per sei partite complessive; alcuni dei risultati erano tra l'altro piuttosto improbabili. Prima della semifinale, però, arriva una mail diversa, che vi chiede cento euro per il pronostico. Pensando che in fin dei conti potete farvi un po' di soldini con una scommessa, pagate volentieri. Avete fatto bene? Probabilmente no.

Immaginiamo infatti che qualcuno abbia inviato la prima email a 64000 persone, predicendo in metà dei casi la vittoria di una squadra e nell'altra metà quella degli avversari – tralasciamo il pareggio, ma la logica è la stessa. La seconda email è stata inviata solo ai 32000 a cui il risultato era stato correttamente prognosticato, sempre con una divisione a metà tra i due possibili vincitori; andando avanti così a dimezzare le mail resteranno 1000 persone a cui inviare la richiesta di soldi; costoro non sanno nulla degli altri 63000, e quindi sono portate a credere che le previsioni abbiano sicuramente un fondamento.

Ma – mi direte – qui la cosa è ben diversa! Di Paul ce n'è uno solo, e le sue previsioni sono pubbliche! Sì, ma. Innanzitutto, se non sbaglio, è solo dalla fase ad eliminazione che si sente parlare di lui; quindi non si possono considerare "validi" i suoi tre pronostici nella fase iniziale a gironi, per la stessa ragione di cui sopra. Detto in altre parole, se avesse sbagliato prima non ne avremmo sentito parlare ora. Indovinare tre partite su tre non è banalissimo, ma una probabilità del 12,5% non è poi così bassa da gridare al miracolo.

Aggiungo un'altra considerazione: si sente dire che l'unico suo errore è stato nella finale degli Europei 2008, dove previde la vittoria dei tedeschi che furono invece sconfitti dalla Spagna, anche se secondo Wikipedia la percentuale di risultati corretti fu dell'80%. Però da un lato non si parla di quanti pronostici gli avessero fatto tentare (qua – in tedesco – c'è il massimo che io sia riuscito a trovare al riguardo) e dall'altro proprio il fatto che abbia commesso un errore ci fa capire che siamo noi a dare alle scelte di

edibilità di Paul un valore che non hanno, cancellando i risultati sbagliati e ricordandoci solo di quelli giusti.

La morale? Stare a vedere i pronostici del polpo è divertente, proprio come era divertente vedere il buonanima di Maurizio Mosca con il suo pendolino; non cercate però di tirare dentro la matematica per dare una patina di importanza alle sue scelte! (ah: se la cosa vi interessa c'è anche questo articolo sulla BBC che ne parla)

Post Scriptum: dopo aver scritto questo post ci sono state ancora le due finali, che sono state correttamente indovinate dal polpo – mentre gli innumerevoli tentativi di imitazione, come lo scimpanzé Pino, hanno fallito miseramente. La probabilità di indovinare cinque risultati di fila scende a meno del due percento; però non mi verrete a dire che gridate al miracolo se alla roulette esce per cinque volte di fila il rosso, vero?

(8 luglio 2010)

32. Parole matematiche: teorema

Matematici e politici danno alla parola teorema due significati completamente opposti. Di chi è la colpa?

I matematici hanno tante brutte abitudini. Una di esse è usare parole assolutamente comuni e dare loro un significato astruso. A dire il vero, la cosa è normalissima nei paesi anglosassoni, solo che noi non ce ne accorgiamo; e anche in Italia l'usanza nasce con nientemeno che Galileo, che volendo scrivere in italiano e non in latino dovette inventarsi un lessico e scelse quello più facilmente comprensibile. A volte, però, succede l'opposto; una parola matematica viene ripresa nella lingua di tutti i giorni, generalmente storpiandone il risultato. Questo è per esempio il caso di **teorema**.

Per un matematico la parola **teorema** ha un significato ben preciso. Ha la stessa radice di "teoria"; entrambe le parole derivano dal greco *theoréo* «io osservo / riguardo / considero», passando per il latino *theorema*. Teoros sarebbe lo spettatore, sempre in greco. In italiano è presente almeno dal 1565, col significato di «proposizione che, in una teoria matematica, viene dimostrata logicamente a partire dagli assiomi». Anche il sito etimo.it, pur con un approccio meno matematico, concorda: «Proposizione, Regola d'arte o di scienza, trovata e stabilita a forza di considerazioni e investigazioni». Poi a scuola hanno cercato di complicarci le cose, parlando non solo di teoremi ma anche di lemmi o corollari, ma accontentiamoci.

Oggi però i politici, soprattutto quando vengono inquisiti, hanno iniziato a lamentarsi perché c'è un teorema contro di loro. Immagino usino la parola più o meno nel significato di «congiura contro di me, ovviamente senza alcuna prova ma solamente per una persecuzione». Come vedete, per loro la parola indica esattamente l'opposto: se ci fosse davvero un teorema matematico, i tipi sarebbero ipso facto condannabili! Mi domando se la colpa di questo slittamento di significato sia dell'omonimo brano di Marco Ferradini, o se in modo molto più banale i pochi ricordi scolastici si sono mischiati a punto tale da non permettere loro di ricordarsi termini come "postulato" o "assioma", che nel contesto avrebbero molto più senso; chi professa il suo cattolicesimo ad ogni piè sospinto potrebbe a maggior ragione parlare di "dogma"...

(11 luglio 2010)

33. Il paradosso di san Pietroburgo

Da un banale gioco a testa o croce non solo si può arrivare a una vincita potenzialmente infinita, ma addirittura la vincita media è infinita!

La seconda città della Russia non è certo nota per avere mantenuto il proprio nome nel ventesimo secolo. Da san Pietroburgo prima il suo nome è stato russificato in Pietrogrado e poi i bolscevichi l'hanno intitolata al padre della patria; caduto il comunismo, Leningrado ha infine ripreso il nome originale. Pensate a quanti documenti hanno dovuto rifare tutte le volte: mica come a Torino, dove corso Unione Sovietica (una prospettiva infinita, si supera sicuramente il civico 500) mantiene il proprio anacronistico nome per evitare il sovraccarico dell'anagrafe! Ma per i matematici la città, oltre a essere intimamente legata al nome di Eulero, è anche nota per avere dato il nome a un paradosso davvero incredibile.

Immaginate di essere al Casinò di san Pietroburgo – ce ne sarà uno? Ce ne sarà mai stato uno? Facciamo finta di sì – e di trovarvi una sala con un gioco molto particolare, che il croupier presenta con un «si vince sempre». Il gioco è molto semplice: chi vuole cimentarsi paga una certa somma specifica, e poi inizia a lanciare una moneta, avendo preventivamente scelto se puntare sulla testa o sulla croce. Supponiamo che la sua scelta sia caduta sulla croce. Se al primo lancio esce croce, il gioco finisce e il giocatore riceve un rublo. Se invece è uscita testa, il giocatore rilancia la moneta; anche stavolta se esce croce il gioco finisce ma questa volta i rubli vinti sono due, mentre se esce testa si va avanti. Se capita per la prima volta croce al terzo lancio si vincono quattro rubli; al quarto, otto rubli; al quinto, sedici rubli e via raddoppiando. Come in tutti i giochi di questo tipo dovete immaginare che il tutto possa proseguire all'infinito e il banco abbia sempre da pagare. L'affermazione del croupier è dunque vera; si vince sempre. Allora, quanto pensate che il banco – ammesso che sia equo – dovrebbe chiedere per darvi il diritto di fare una partita? Due rubli? Cinque? Dieci??

Facciamo i conti. Abbiamo probabilità 1/2 di finire la partita al primo lancio e vincere un rublo; questo caso vale quindi mezzo rublo. (Per chi non lo sapesse: data una distribuzione di probabilità $p_1, \dots p_n$ con vincite relative $V_1, \dots V_n$, la vincita media è data dalla somma dei prodotti $p_1V_1, \dots p_nV_n$) In caso contrario, abbiamo (1/2)·(1/2), cioè 1/4, di probabilità di finirla al secondo lancio; aggiungiamo alla nostra vincita media (1/4)·2 = mezzo rublo. Se si finisce al terzo tentativo, al valore atteso viene sommato (1/8)·4 = mezzo rublo: al quarto, si somma (1/16)·4 = mezzo rublo, e via discorrendo. Notato nulla di strano? La somma di tutti questi valori parziali è infinita. Quindi qualunque quantità di denaro siamo disposti a sborsare per fare una partita sarà sempre troppo poco, e il croupier negherà gentilmente il permesso di iniziare la partita, per non far perdere il banco.

Il paradosso, come molti di quelli che riguardano l'infinito, è del tutto corretto in teoria ma non funziona

in pratica. Perché funzioni, infatti, richiede non solo la possibilità di proseguire il gioco per un tempo indefinito ma anche e soprattutto l'assunzione che il banco abbia a disposizione una riserva infinita di denaro! Per dare un'idea, se invece che un rublo la prima vincita fosse di un centesimo di euro dopo una sequenza di cinquantun lanci favorevoli consecutivi raggiungeremo il prodotto annuo lordo italiano, e altri dieci lanci ci farebbero superare la ricchezza globale del pianeta Terra. Sì, è vero che la probabilità di ottenere sessanta volte di fila testa è così infima da risultare praticamente nulla; ma la fregatura è proprio in quel "praticamente", che come sapete in matematica non ha cittadinanza. Non appena si mette un limite alla vincita massima, il costo di una partita perché il gioco sia equo crolla; se il massimo che si può vincere è per esempio un milione di rubli – che non sono certo poco – la vincita media si attesta sotto i dieci euro e mezzo; se si potesse arrivare a vincere fino a un miliardo di rubli, la vincita media sale solo di altri cinque euro. Non molto, vero? Ecco insomma un modo per vedere che l'infinito può essere davvero molto lontano dalla realtà!

Detto questo, ci sono anche altri modi di addomesticare il paradosso. Come del resto dice la voce di Wikipedia al riguardo, già Daniel Bernoulli, che diede il nome al paradosso quando nel 1738 lo presentò nei *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis*... di san Pietroburgo, fornì una risposta alla domanda «quanto offrireste al banco per il diritto di fare una partita?». La domanda sembra identica a quella iniziale, ma le cose cambiano: Bernoulli infatti argomentò che più soldi si hanno meno un'ulteriore vincita ci interesserebbe, e quindi l'ipotesi implicita che il valore dato alla vincita all'n-simo lancio sia sempre lo stesso per qualunque valore di n cade. Questo valore diminuisce sempre di più, e quindi la somma diventa finita. Questo ragionamento ha portato alla **teoria dell'utilità attesa**, che ha avuto una seconda vita nella seconda metà del XX secolo quando la teoria dei giochi l'ha riscoperta; però per il banco, che secondo questa teoria avrebbe comunque la cosiddetta avversione al rischio, il ragionamento purtroppo non funziona.

Ah: già che ci sono vi faccio notare che la martingala, la teoria secondo cui per vincere sicuramente alla roulette basta raddoppiare la puntata ogni volta che si perde, è strettamente collegata a questo paradosso. Anche nel caso della martingala, infatti, la procedura funziona solamente se sia il giocatore che il banco hanno un patrimonio infinito e sono eventualmente disposti a giocare all'infinito...

(16 luglio 2010)

34. Dal paradosso dell'Alabama ai deputati frazionari

Il metodo proporzionale sembra essere il più equo per suddividere i deputati da eleggere; ma anche in questo caso sorgono dei paradossi.

Beh, in Italia ormai facciamo fatica a ricordarci quale sia il sistema elettorale del momento, e verrebbe quasi voglia di riprendere il duetto Enzo Jannacci-Paolo Rossi: «si minore diminuito, si minore maggioritario; si minore proporzionale, si minore referendario!» Negli USA la cosa è molto più semplice: il Senato elegge due rappresentanti per stato, e il Congresso ha un numero di rappresentanti per stato proporzionale al numero di abitanti calcolato a ogni censimento. Ma è poi tutto davvero così semplice? Non proprio.

La Costituzione americana si limita a dire che «il numero di rappresentanti non deve eccedere uno per trentamila abitanti, ma ogni stato deve avere almeno un rappresentante». Il limite dei 30.000 abitanti è da un bel pezzo teorico, come potete bene immaginare: con 300 milioni di abitanti attualmente residenti, il Congresso dovrebbe avere 10000 parlamentari! Come racconta Alex Bogomolny nell'articolo che ho usato come fonte, nel 1929 si decise di fissare il numero di rappresentanti a 435, e quindi limitarsi a spostare seggi da uno stato all'altro. Ma prima di allora vennero usati diversi metodi per ripartire i seggi, metodi che casualmente venivano caldeggiati dall'uno o dall'altro politico a seconda del loro tornaconto, e che facevano spesso cambiare il numero di seggi assegnati per cercare di accontentare tutti. Si andava dall'arrotondamento per difetto del numero di seggi (e gli stati piccoli si lamentavano, perché perdevano ancor più potere relativo) all'arrotondamento per eccesso (e gli stati grandi si lamentavano, perché i piccoli ottenevano più potere relativo) all'arrotondamento all'intero più vicino (e almeno in questo caso nessuno poteva lamentarsi a priori, era la dura legge del caso).

Alla fine si stabilì di usare quello che in fin dei conti sembrava il sistema più logico; si iniziava ad allocare i seggi con una divisione intera della popolazione per il numero totale di posti da assegnare, e i seggi rimasti venivano assegnati agli stati con i resti più alti – in percentuale, non in assoluto. Anche un ragazzino avrebbe convenuto che in fin dei conti la cosa era equa. O no? Dopo il censimento del 1880 C. W. Seaton, funzionario capo dell'ufficio del censimento, si mise a calcolare quanti seggi sarebbero stati assegnati ai vari stati se il Congresso ne avesse avuti un numero tra 275 e 350. Quello era un periodo in cui si tendeva a far crescere il numero di rappresentanti totale per evitare che qualche stato ne perdesse; anche senza i computer si poteva comunque perdere un po' di tempo e fare qualche migliaio di divisioni. Successe però un fatto a prima vista incredibile; come spiega Wikipedia, se si fosse deciso per un Congresso di 299 seggi l'Alabama ne avrebbe avuti 8, ma aumentando il numero di seggi a 300 l'Alabama ne avrebbe ottenuti solo **sette**. Da qui il nome di **paradosso dell'Alabama** dato a questa distribuzione.

Com'era possibile? Facciamo un esempio numerico semplice, e vediamo cosa succede. Immaginiamo di avere tre stati con un totale di 100 cittadini; lo stato A e il B ne hanno 42 mentre il C ne ha solo 16. Vediamo come si suddividerebbero tra gli stati rispettivamente 15 e 16 seggi:

Stato	**abit.**	**seggi**	**seggi**
A	42	6,3 → **6**	6,72 → **7**
B	42	6,3 → **6**	6,72 → **7**
C	16	2,4 → **3**	2,56 → **2**
totale	**100**	**15**	**16**

Dalla tabella si vede cosa succede in questo caso particolare; i due stati più grandi, proprio perché hanno un quoziente più grande, riescono a far crescere la parte frazionaria più in fretta dello stato più piccolo e così possono crescere entrambi di un seggio a scapito dell'altro. È triste (per i cittadini dello stato C, intendo), ma è così. Ma ci sono anche altre fregature: prendiamo ad esempio il **paradosso della popolazione**. In questo caso abbiamo il numero di seggi prefissato, ma la popolazione complessiva che cresce. Bene, può darsi che uno stato più piccolo ma con una crescita proporzionale maggiore **perda** seggi a favore di uno stato più grande con una crescita minore. Ecco un esempio di questo paradosso (mi spiace che sia leggermente più complicato, ma è il primo che sono riuscito a trovare)

Stato	**abit.**	**seggi**	**abit.**	**seggi**
A	92	15,44 → **15**	97	15,75 → **16**
B	42	7,05 → **7**	41	6,66 → **7**
C	15	2,52 → **3**	16	2,60 → **2**
totale	**149**	**25**	**154**	**25**

Lo stato C è cresciuto di 1/15, cioè del 6.6% abbondante, eppure ha perso un seggio a favore dello stato A che è cresciuto dei 5/97, cioè di meno del 5.5%. Forse ancora peggio, lo stato B, che ha **perso** cittadini, continua a mantenere i suoi sette rappresentanti. Esiste anche un terzo paradosso, quello del **nuovo stato**; se si aggiunge un nuovo stato lasciando invariato il numero di seggi da suddividere può capitare che uno degli altri stati ne ottenga un altro in più. Nella prossima tabella troverete un esempio di come l'inserimento dello stato D faccia sì che C ottenga un rappresentante in più. Se volete divertirvi a trovare altri esempi, la pagina di Cut-the-knot citata in cima ha alcune applet Java che vi permettono di fare delle prove per conto vostro.

Stato	**abit.**	**seggi**	**abit.**	**seggi**
A	227	5,67 → **6**	227	5,28 → **5**

B	227	5,67 → **6**	227	5,28 → **5**
C	66	1,65 → **1**	16	1,53 → **2**
D			39	0,91 → **1**
totale	**520**	**13**	**559**	**13**

Purtroppo non c'è una soluzione univoca al paradosso; un po' come quanto capita con il Teorema di Arrow, esiste un teorema dimostrato nel 1982 dai matematici Michel Balinski e Peyton Young che dimostra che ogni metodo di assegnazione dei resti risulta in un paradosso, se ci sono tre o più stati (o partiti) in gioco. Come fare, allora? Beh, George Szpiro ha proposto di inviare al congresso deputati frazionari. No, non bisogna tagliare loro parti del corpo, anche se so di molti elettori che apprezzerebbero la cosa: molto più semplicemente, se per dire uno stato avrebbe diritto a 3,4 rappresentanti se ne inviano tre “con pieni poteri” e uno il cui voto vale solo 0,4. In questo modo la proporzionalità a livello statale sarebbe perfettamente rappresentata, e oggi come oggi non sarebbe affatto difficile contare elettronicamente il voto totale sommando tutti i decimali necessari.

Io nel mio piccolo farei una proposta leggermente diversa: nell'ipotesi di cui sopra si inviano quattro rappresentanti, il voto di ciascuno dei quali vale 0,85. È vero che distruggeremmo completamente l'associazione “un delegato, un voto”; però le differenze non sarebbero così ampie e nel caso di voto compatto a livello dei singoli stati non cambierebbe nulla rispetto a oggi. Purtroppo il metodo non è applicabile ai singoli partiti nel parlamento italiano, come sono certo tutti sperate; ce ne sono troppi, e anche se è vero che un rappresentante con 0,07 “voti equivalenti” non riuscirebbe probabilmente a far cadere un governo non avremmo comunque spazio sufficiente a Montecitorio per far sedere tutti i nostri onorevoli, e soprattutto dovremmo continuare a pagarli tutti come “interi". Ancora una volta l'eleganza della trattazione matematica si scontra con la dura realtà.

(20 luglio 2010)

35. Parole matematiche: parabola

Che cosa hanno in comune i racconti evangelici con l'antenna satellitare?

La storia della parola **parabola** (ah, lo sapete che “parola” deriva proprio da “parabola”? Se masticate un po' di spagnolo, dove “parola” si dice “palabra”, magari ve ne eravate già accorti) è piuttosto complicata. Forse una volta non la si sentiva usare più di tanto, al più erano gli sportivi che vedevano le automobili percorrere una curva parabolica oppure osservavano la parabola di un lancio; oggi però sembra che tu non sia nessuno se non hai la parabola per ricevere centinaia se non migliaia di canali televisivi via satellite e non guardarne mai più di due o tre.

Naturalmente le parabole di cui ho appena parlato corrispondono effettivamente alla curva nel senso matematico. Più precisamente quella televisiva è (parte di) un paraboloide di rotazione perché è tridimensionale, e forse la curva parabolica non è affatto una parabola; ma se è solo per questo nemmeno la parabola di un oggetto lanciato verso l'alto lo è (lo sarebbe se la Terra fosse piatta). Insomma, fin qua siamo sulla parola matematica vera e propria.

Però c'è anche un altro tipo di parabola, quello evangelico, che a prima vista non ha nulla a che fare con la curva di cui sopra. Non ci crederete, ma invece sì! Entrambe le accezioni derivano dal termine greco *parabolé* che significa «io confronto, metto in parallelo». Nel caso della parabola intesa come figura geometrica, il nome è stato probabilmente dato perché se si facesse un tavolo da biliardo a forma di parabola e si colpisse – senza effetto – una biglia messa nel fuoco della parabola, dopo avere rimbalzato su un punto qualunque della parete la sua traiettoria sarebbe sempre nella stessa direzione. A sua volta, come dice etimo.it, *parabolé* è costituito da *para-*, confronto, e *-ballo*, getto oppure pongo; la balestra e la balistica (toh...) hanno la stessa radice. Ma torniamo al racconto con la morale. Il parallelismo con la figura deriva dal fatto che già prima della nascita dei vangeli i greci stavano usando la parola con il significato di «parallelo che serve a chiarire un argomento più difficile mettendolo a fianco di uno più chiaro e noto»: insomma, quello che oggi chiameremmo un esempio. Da lì il termine è stato riciclato dagli estensori del Nuovo Testamento per indicare i racconti allegorici che Gesù usava per spiegare le verità di fede con esempi della vita di tutti i giorni, e come è capitato spesso il significato traslato dato dagli evangelisti è diventato quello principale.

Ah, a proposito dei significati traslati: quando si parla di «parabola di un potente» ovviamente si pensa alla figura geometrica, anche se un po' distorta. Insomma, l'importante è che qualcosa prima cresca, rimanga per un po' all'incirca costante, e poi cali; non è necessario che abbia la forma specifica di una parabola. Però non mi sento di cassare questo significato: ci sono cose molto peggiori!

(23 luglio 2010)

36. Il teorema di Pitagora

Il teorema più famoso della geometria merita indubbiamente una trattazione a sé.

Il teorema di Pitagora è indubbiamente uno spauracchio per tutti i "diversamente matematici", pur avendo – o forse proprio perché ha – una notorietà che va ben al di là delle lezioni di geometria a scuola. Nel 1960 Adriano Celentano cantava il brano Pitagora (testo di Luciano Beretta; musica di Piero Soffici), con gli immortali (?) versi

> La somma dei cateti
> costruiti su due gambe
> è sempre quella dell'ipotenusa
> Pitagora, Pitagora
> se l'uomo quadrato sei tu
> inventami un sistema
> il nuovo teorema
> per vivere solo d'amor

mentre nella sua opera principe *Il mondo come volontà e rappresentazione* Arthur Schopenhauer scriveva a proposito della dimostrazione euclidea del teorema

> «Spesso, come nel caso del teorema di Pitagora, si disegnano delle righe e non sappiamo il perché, e solo in seguito scopriamo che erano una trappola che si chiude all'improvviso e imprigionano il consenso dell'attonito studente.»

andando poi a presentare la "sua" dimostrazione... valida solo per il triangolo rettangolo isoscele, e terminando con «ma tanto la si può mettere a posto anche per un triangolo qualunque». Occhei, un classico esempio di "dimostrazione" matematica con le virgolette, ma forse ci vorrebbe qualcosa di meglio.
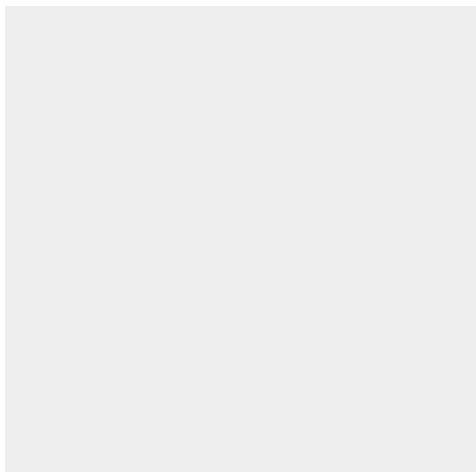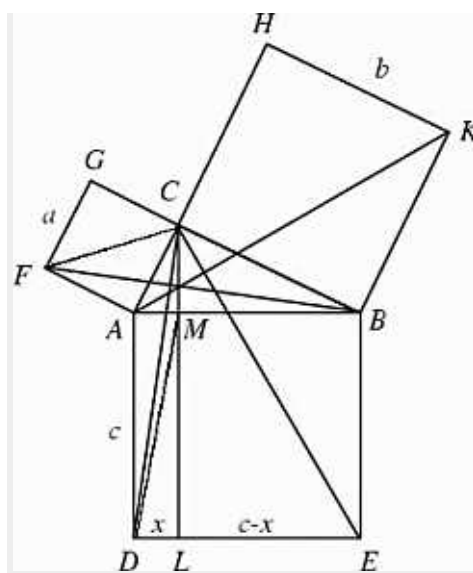
Figura 36.1: Dimostrazione euclidea del teorema di Pitagora (da Polymath)

Diciamocela tutta, però: Schopenhauer di matematica non ne avrà capita molta, ma aveva ragione da vendere quando diceva che la dimostrazione euclidea del teorema era una *Mausefallenbeweise*, una “trappola per topi”. Guardate qua a fianco la costruzione che viene richiesta: la figura è tratta dal monumentale saggio di Federico Peiretti che potete trovare sul sito di Polymath. Dal punto di vista di Euclide probabilmente la dimostrazione aveva un senso, visto che si appoggia pesantemente ai teoremi di uguaglianza delle aree dei triangoli e dei rettangoli che aveva da poco dimostrato nei suoi *Elementi*; per noi il tutto è una complicazione enorme. L'altra possibilità è che Euclide abbia scelto apposta una dimostrazione complicata per far risaltare l'importanza del teorema, anche se personalmente trovo l'ipotesi piuttosto assurda. È comunque indubbio che ci siano centinaia e centinaia di dimostrazioni del teorema: a parte che il teorema era già noto ai babilonesi nel 1850 a.C., per le dimostrazioni si parte addirittura da Platone, che nel suo dialogo *Menone* fa mostrare a Socrate come facendo le domande giuste anche uno schiavo conosce – maieuticamente – l'enunciato del teorema e si arriva persino a un presidente degli Stati Uniti. No, non George W. Bush, bensì James Garfield, che nel 1876, quando era ancora un semplice deputato, inviò al *New England Journal of Education* la sua dimostrazione. Nonostante la data di pubblicazione fosse il primo aprile, il suo approccio non è affatto uno scherzo, e ha tra l'altro la particolarità di non disegnare nemmeno un quadrato; la figura fondamentale è un trapezio. Il commentatore della rivista terminò l'articolo con la frase «Pensiamo che su questa cosa i nostri onorevoli possono essere d'accordo senza distinzione di partito»; non so se oggi potremmo dire la stessa cosa da noi.
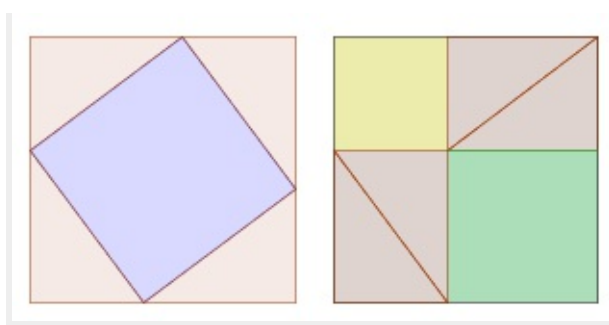
Figura 36.2: Dimostrazione taglia-e-incolla

Quale sia la “migliore” dimostrazione è sicuramente una questione di gusto personale; al momento la mia preferita è mostrata qui a fianco, ed è della serie “dimostrazione senza parole”; è stata trovata per la prima volta negli scritti indiani di Bhāskara, che visse nel dodicesimo secolo. Basta infatti mettere in una o nell'altra posizione quattro copie identiche del nostro triangolo rettangolo, e avanza esattamente lo spazio per il quadrato costruito sull'ipotenusa oppure per i due quadrati costruiti sui cateti. La parte di destra della figura può anche essere utilizzata per ricordarsi uno dei prodotti algebrici notevoli: se i cateti del triangolo sono infatti lunghi a e b, dal disegno si vede che $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Se però non siete così convinti della cosa, niente paura: potete sempre andare su Cut The Knot e passare un po' di tempo a scegliere la vostra dimostrazione preferita tra le **ottantaquattro** ivi presenti. Non arriveremo ai 365 modi diversi in cui si dice che i portoghesi possano preparare un piatto di *bacalhau*, ma siamo sulla buona strada!

Per i curiosi, termino con un paio di generalizzazioni del teorema. Innanzitutto non occorre proprio costruire un quadrato sui cateti e sull'ipotenusa: qualunque figura va bene, purché siano tutte e tre simili. Quindi si possono costruire semicerchi, esagoni o anche casette che fanno tanto Monopoli®. Inoltre se il triangolo non è rettangolo e l'angolo tra i lati a e b è γ si può applicare il **teorema del coseno** e dire che $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$, dove c è naturalmente il terzo lato del triangolo: formula sicuramente meno elegante, il che fa capire come mai nessun matematico antico abbia pensato di appropriarsene.

(27 luglio 2010)

37. Paul Erdős

I matematici sono spesso dipinti come persone piuttosto strane, anche se in genere non pericolose. Beh, Erdős ha pienamente diritto di essere inserito in questa categoria.

È nozione comune che i matematici abbiano dei notevoli problemi a rapportarsi con la vita reale. Anche i filosofi condividono questa nomea, con la differenza forse che questi ultimi sembrano più che altro persi nel loro mondo mentre i primi sono molto più eccentrici, anche se fortunatamente non sono pericolosi per gli altri. In realtà non è che in genere le cose siano proprio così; però di matematici strani ce ne sono stati, e Paul Erdős è sicuramente uno di loro.

Erdős nacque il 26 marzo 1913 a Budapest (e infatti il suo cognome non ha una banale ö ma appunto una ő; c'è gente che si lamenta tutte le volte in cui per comodità scrivo il suo cognome Erdös, per una volta cercherò di fare lo sforzo di scriverlo correttamente; se il vostro lettore vi mostra un carattere strano, sappiate che è una o con delle virgolette sopra), ma lasciò l'Ungheria già prima della seconda guerra mondiale, a causa del crescente antisemitismo che stava montando. Da lì iniziò una vita che diventò sempre più itinerante nel vero senso della parola: a partire dagli anni '60 si spostava da un'università all'altra, e dalla casa di un matematico a quella di un altro, anche se aveva per così dire un pied-à-terre a casa di Ronald Graham dove c'era una stanza tutta per lui. D'altra parte Erdős non si è sposato, non aveva figli, non era nemmeno interessato ai beni materiali; il suo trasloco consisteva più o meno nello spostare una valigia da un'abitazione all'altra.

Ma le sue idiosincrasie non finivano certo qua! Aveva ad esempio tutto un suo modo di parlare. I bambini erano per esempio degli “epsilon” (in quanto piccoli a piacere...); una persona era “morta” se non faceva più matematica, mentre se era effettivamente morta allora “se ne era andata”; gli uomini erano “schiavi” e le donne “capi”; tenere un seminario matematico era “pregare”; Dio – in cui comunque non credeva – era il Supremo Fascista, che aveva con sé il Libro; non la Bibbia, naturalmente, ma un enorme elenco delle dimostrazioni più eleganti dei teoremi di matematica. A volte un mortale era così fortunato da poter dare un'occhiata al Libro e trovare una di quelle dimostrazioni, cosa che per Erdős era un onore massimo.

In effetti lui non è stato un matematico mainstream, tanto che ad esempio non vinse la medaglia Fields – anche se la dimostrazione “elementare” sua e di Selberg del teorema sulla distribuzione dei numeri primi sarebbe potuta essere un ottimo candidato e anche il premio Wolf, che in genere è “alla carriera” gli fu dato con una motivazione molto generica e non per “risultati eccezionali” in un qualche ambito di ricerca, come in genere capita. Possiamo definire Erdős un “risolutore di problemi”: si attribuisce a lui (anche se la frase è di Alfréd Rényi) la frase «un matematico è una macchina che converte caffè in teoremi», e negli anni '70 aggiunse ai numerosissimi caffè le anfetamine. Testardo come un mulo, a seguito di una scommessa con Graham non ne assunse per un mese; vinta la scommessa, ricominciò la sua abitudine,

commentando che durante quell'astinenza la matematica era rimasta bloccata per un mese.

I teoremi dimostrati da Erdős sono specialmente combinatori, di teoria dei numeri e di teoria dei grafi; campi non certo facili, ma nemmeno troppo comuni per poter fare una scuola... anche se a dire il vero una scuola c'è. Erdős è infatti stato non solo un matematico prolificissimo, con 1475 articoli pubblicati, ma anche uno che amava scrivere articoli con altri autori. I matematici hanno così definito il **numero di Erdős**: Erdős ha per definizione come proprio numero zero, i 511 fortunati che hanno scritto un articolo con lui hanno numero 1, coloro che hanno scritto un articolo con una persona che ha numero di Erdős 1 hanno il numero 2, e così via. C'è persino un sito dedicato a tutto ciò: in fin dei conti i matematici sono persone strane, lo dicevamo all'inizio... (e il numero di Bacon è solo una scopiazzatura, se ve lo foste chiesti). Ah, il record di articoli scritti con Erdős (62) spetta al matematico ungherese András Sárközy. Come? non sapevate che monsieur le Président de la France è di origine ungherese, anche se quando la sua famiglia emigrò in Francia perse tutti gli accenti? Non credo comunque che Nicolas sia un parente di András, e probabilmente non ha un numero di Erdős.

Erdős morì il 20 settembre 1996 a Varsavia, mentre era a un convegno matematico; insomma, l'equivalente di un attore teatrale morto sul palcoscenico. Se queste poche righe su di lui non vi bastano, potete provare a leggere il suo Compleanno dai Rudi Matematici, oppure comprare il libro di Paul Hoffman *L'uomo che amava solo i numeri.*

Per i curiosi che si chiedono se io ho un numero di Erdős: credevo di no, visto che non ho una carriera accademica e i pochi articoli che ho scritto da neolaureato erano insieme ai miei colleghi in Cselt nella stessa mia condizione. Invece no! Ho casualmente scoperto di essere uno dei quarantaquattro gatti... pardon, coautori di un articolo apparso negli *Annals of Improbable Research*. Dato che uno degli altri quarantatré coautori, Francesco de Comite, ha numero di Erdős (al più) 4, il mio è (al più) 5. Devo scriverlo nei miei biglietti da visita!

(30 luglio 2010)

38. La funzione base-13 di Conway

Noi siamo abituati a pensare alle funzioni come qualcosa di disegnabile, ma non è che sia sempre così, anzi. Ecco un esempio non molto noto di funzione assolutamente incredibile.

Questa volta ci avventuriamo nei meandri dell'analisi matematica; vedremo come la nostra intuizione non sia sempre così brava a intuire le cose. Il tema è un po' più complicato di quanto scrivo di solito, ma garantisco che non ci sono dimostrazioni da seguire, e che il trucchetto usato è molto interessante, oltre a essere utile anche per altre dimostrazioni sicuramente molto più note.

Il tutto parte dallo studio delle funzioni di variabile reale. Generalmente una funzione è vista come una bella curva disegnata su un foglio di carta quadrettata dove sono stati aggiunti gli assi cartesiani; l'unica cosa a cui bisogna stare attenti è che la curva "non torni mai indietro", altrimenti ci sarebbe un numero per cui la funzione assume due valori, e Ciò è Male. Questa definizione va benissimo per gli esempi che ci capitano nella vita di tutti i giorni; se ad esempio disegniamo la funzione della velocità della nostra auto rispetto al tempo durante il percorso casa-ufficio, otterremo una di queste curve, dove spesso saremo fermi e a volte magari avremo una velocità negativa perché stavamo facendo manovra. Tale funzione ha una caratteristica fondamentale: possiamo essere certi che in un qualche momento abbiamo toccato la velocità compresa tra la minima e la massima che siamo riusciti a fare. In matematica questo fatto ha il nome pomposo di Teorema dei valori intermedi, e viene insegnato all'inizio del corso di Analisi 1.

Il teorema funziona perché non è ancora stato inventato il teletrasporto, e quindi la velocità è una **funzione continua**. Anche se ti schianti di colpo contro un lampione – speriamo di no – non è vero che passi in tempo zero dai 130 all'ora a velocità zero; ci metterai magari un decimo di secondo, il che significa che un decimillesimo di secondo dopo l'urto tu stai ancora viaggiando a quasi 130 all'ora. I matematici, essendo persone che amano vedere le cose da un altro punto di vista, si sono chiesti «Ma vale anche il viceversa?» Detto in termini rigorosi: se abbiamo una funzione f tale che presi due suoi punti a caso a e b sappiamo che nell'intervallo $[a,b]$ essa assume tutti i valori compresi tra f(a) e f(b), possiamo dire che f è continua? La risposta putrtoppo, o per fortuna, è no. John Conway ha trovato un bellissimo controesempio; ora ve lo illustro, vediamo se vi accorgete da dove lui ha preso l'idea.

Conway costruisce una funzione dall'intervallo]0,1[(senza gli estremi, dunque) a valori in R in questo modo. Preso un numero qualunque, lo scrive in base 13. Anche se non lo si vede fatto spesso, non c'è nessuna ragione perché i numeri in base diversa da 10 debbano essere interi; si può tranquillamente proseguire dopo la virgola, con la regola classica per la divisione. L'unica cosa che ci occorre è avere tredici cifre invece che dieci; Conway usa 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,v,m,p. Per evitare di avere due rappresentazioni dello stesso numero, come succede in base 10 dove 0,49999999... è la stessa cosa che

0,5000000..., si decide di non usare le rappresentazioni che finiscono in ppppp... Conway guarda poi questi numeri, e chiama “ben formati” quelli con le seguenti caratteristiche:

1. da un certo punto in poi usano solo le cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
2. subito prima di quel punto c'è la cifra v
3. prima ancora c'è un numero a piacere (ma almeno una) di cifre nell'insieme {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
4. subito prima c'è la cifra p oppure la cifra m
5. non importa cosa ci sia prima ancora

Per esempio, 0,12m34pp1p2m34vv1111111111... non è un numero ben formato (ci sono due v di fila), mentre 0,12m34pp1p2m34v1111111111... lo è.

Ora ci siamo: la funzione di Conway vale 0 per i punti che scritti in base 13 non sono ben formati. E per gli altri? Semplice. Si butta via la “parte prima ancora” indicata sopra, e **si rilegge** la stringa restante sostituendo a m il simbolo “−”, a p il simbolo “+” e a v il simbolo “,”. Tanto sono solo simboli, no? Così il numero tredecimale 0,12m34pp1p2m34v1111111111... diventa prima m34v1111111111... e poi −34,11111111... Questo, letto come fosse un usuale numero decimale, è il valore della funzione nel punto (tredecimale) 0,12m34pp1p2m34v1111111111...

È impossibile disegnare questa funzione patologica: i suoi valori oscillano spazzando tutti i numeri reali in un qualunque intervallo piccolo a piacere. Ma questa è proprio la nostra ipotesi del teorema inverso, e la funzione non è continua; ecco dunque il controesempio cercato.

Il trucco per tirare fuori questa funzione è naturalmente quello di leggere la stessa stringa di caratteri in due modi diversi; procedimento che venne usato per la prima volta nel 1931, come i più attenti di voi avranno intuito. Però forse in questo caso la doppia lettura è più facile da capire. L'unica cosa che posso aggiungere è che per un matematico l'idea di definire una funzione in questo modo è semplicemente favolosa; se lo è anche per voi, potete fregiarvi del titolo di “matematico dentro”!

(grazie a Zar per avermi fatto scoprire la perla!)

(3 agosto 2010)

39. Parole matematiche: prodotto, fattore

Due parole al prezzo di una; stavolta l'origine è latina e non greca, e soprattutto hanno in comune qualcosa in più di quanto si potrebbe pensare a prima vista.

Due parole al prezzo di una, questa volta. Non tanto perché ci sono i saldi, che tanto scrissi questo post in agosto e i saldi estivi erano praticamente terminati; ma più semplicemente perché le due parole hanno parecchio in comune, e non solo dal punto di vista matematico.

La parola **prodotto** non è di origine greca – non sia mai! – ma latina. Deriva infatti dal verbo *producere*, che significa «fare avanzare», letteralmente «guidare in avanti». Non per nulla, oltre al prodotto la stessa radice verbale ci ha dato i conducenti e il Duce. In questo senso il verbo latino si è trasformato nell'italiano "produrre", e abbiamo espressioni come il Prodotto Nazionale Lordo che non è un moltiplicatore dei soldi ma fa comunque sempre bella mostra di sé nei giornali. Il termine è entrato molto presto nella lingua italiana: la prima occorrenza, nella forma "produtto", si trova in Dante.

E allora come mai il risultato della moltiplicazione si chiama prodotto? Colpa dei commercianti. Quelli hanno iniziato a parlare del "prodotto della vendita", che si calcolava *moltiplicando* il numero di oggetti venduti per il prezzo unitario. Visto che nel Basso Medioevo e ancora tra Umanesimo e Rinascimento i conti li facevano soltanto loro, il nome è rimasto appiccicato, anche se paradossalmente fino al sedicesimo secolo non se ne trova traccia: si vede che i matematici parlavano di moltiplicazioni solo in testi scritti in latino.

Parlando di prodotto, non si possono non menzionare i suoi componenti, vale a dire i fattori. Il termine **fattore** fa probabilmente venire in mente il contadino che aveva una fattoria (ia, ia, o), o almeno lo faceva venire in mente fino a qualche decennio fa; ora non ne sarei più così sicuro. In effetti, l'etimologia è proprio quella: il termine deriva dal latino *factor*, "fabbricatore". Nell'antichità industrie non ce n'erano, solo artigiani, e dunque un posto dove si producevano tante cose era per definizione una "fattoria". La prima occorrenza in italiano della parola "fattore" col significato di «amministratore di un'azienda agricola» risale addirittura al 1288! Non che il termine nel senso matematico sia poi così posteriore, però: già nel 1292 qualcuno ha pensato che i numeri che fabbricavano (facevano ottenere) il prodotto potevano essere chiamati fattori. Il bello è che non è stato un matematico a usare per la prima volta questa parola – anche perché, come scrivevo sopra, a quei tempi nessun matematico avrebbe usato il volgare. Non ci crederete, ma la prima occorrenza matematica della parola si trova in... Dante. Sempre lui, inutile: non possiamo farne a meno.

Per curiosita aggiungo che "fattoriale", quell'operazione che a partire da un numero ne ottiene uno molto pi grande moltiplicando tra loro tutti quelli da 1 fino a lui, deriva sì da fattore, ma con un giro tortuoso: in

effetti, la prima occorrenza del termine (nel 1892) aveva il significato «che si riferisce a un fattore». Presumibilmente si è proseguito pensando che in un fattoriale ci si riferisce a tutti i fattori, o semplicemente si è tradotto dall'inglese: la parola *factorial* come aggettivo è attestata dal 1837 e come sostantivo dal 1869. Cosa pensassero i matematici inglesi non lo so.

(6 agosto 2010)

40. P != NP (o no?)

La comunità matematica è stata scossa da una presunta dimostrazione, poi trovata errata, della congettura più importante nel campo dell'informatica: alcuni problemi sono intrinsecamente difficili. Ecco una spiegazione di qual è il problema.

All'inizio di agosto 2010 la comunità matematica mondiale è stata scossa da una notizia bomba: un ricercatore dell'HP, Vinoy Deolalikar, ha affermato di avere dimostrato che effettivamente P != NP. Su *Good Math, Bad Math* MarkCC ha fatto un rapido resoconto del problema per i matematici non esperti in teoria della complessità. E per chi matematico non è?

Per capire cosa significhi la sigla del titolo, che assomiglia tanto a una crittografia, bisogna fare alcuni passi indietro. Come penso sappiate dalle barzellette sulla categoria, il matematico è solo interessato a scoprire se la soluzione al problema esiste; al più cerca di dimostrare che è unica. Possiamo avere alcune categorie particolari di matematici; i logici vorranno magari essere certi che il problema sia decidibile, mentre i costruttivisti vogliono essere certi che la soluzione sia computabile, cioè esista un algoritmo che prima o poi termini. Ma qui ci si ferma: che ci vogliano dieci, mille, un milione di o anche un numero di Skewes di operazioni è irrilevante. Ma per gli informatici, che i conti li fanno davvero (beh, li fanno fare ai computer, ma il concetto è quello) la cosa è ben diversa.

A dirla tutta, nemmeno gli informatici sono poi così interessati al numero **esatto** di operazioni, e preferiscono avere una stima sufficientemente generica che indichi come il numero di operazioni cresca al crescere dei dati di partenza; è ovvio che ordinare mille elementi è più lungo che ordinarne dieci, ma *quanto* è più lungo? Per definire il “quanto” si usa il concetto di ordine di grandezza, o più precisamente la “notazione O grande”. Data una dimensione di dati di input n, si dice che (la complessità di) un algoritmo è $O(f(n))$ se il numero di operazioni necessarie per eseguirlo è un multiplo di $f(n)$ più altra roba che all'infinito “conta di meno". Se per esempio un algoritmo richiedesse $5n^3 + 1000000n^2 + 10^{20}$ operazioni, si dice che è $O(n^3)$, anche se per n=1000 il termine che conta è quello costante. Ah: se si parla di algoritmi numerici, storicamente si considera il numero di moltiplicazioni necessarie, e non ci si preoccupa delle addizioni che nei primi computer erano molto più semplici da eseguire delle moltiplicazioni. Ma queste sono minuzie. Per fare un esempio pratico, i migliori algoritmi per ordinare n elementi richiedono $O(n \log n)$ operazioni, e si è anche dimostrato che quello è il limite teorico; si potrà diminuire il numero effettivo di operazioni, ma saranno sempre grosso modo quelle lì.

Possiamo finalmente arrivare alla nostra notazione iniziale. I problemi per cui è noto un algoritmo per risolverli che richiede un numero polinomiale di operazioni fanno parte della classe P, che sta appunto per “polynomial". Esempi di questi algoritmi sono l'ordinamento di n numeri, oppure il prodotto di due matrici $n \times n$, il cui algoritmo record attuale richiede $O(n^{2,376})$ operazioni. Ci sono poi alcuni problemi

teorici che si sa essere intrinsecamente difficili e richiedere un numero di operazioni che cresce esponenzialmente con n; questi fanno parte della classe EXP. Visto che e^n cresce più in fretta di n^k per qualunque k, problemi di questo tipo sono intrinsecamente tosti, ma come ho detto non capitano in pratica. C'è poi un'altra categoria di problemi, chiamati appunto NP; la sigla non sta per “non polynomial", come si potrebbe pensare, ma per **non deterministic polynomial**.

Che significa? Fino a ieri, significava che non sono noti algoritmi di complessità polinomiale per risolverli, ma che sarebbe possibile risolverli in tempo polinomiale se avessimo un computer non deterministico. Il modo più semplice per capire questa definizione è immaginare l'Algoritmo di Gastone. Gastone Paperone, essendo per definizione fortunatissimo, ogni volta che deve fare una scelta trova sempre quella giusta; in questo modo evita tutti i passi falsi e arriva alla soluzione di un problema NP in tempo polinomiale, mentre non solo Paolino Paperino che è notoriamente uno sfigato ma anche Qui, Quo, Qua con il loro Manuale delle Giovani Marmotte ci metteranno un tempo esponenziale. Fuor di metafora, l'algoritmo Paperino rappresenta il caso pessimo, mentre l'algoritmo Qui-Quo-Qua rappresenta il caso tipico, naturalmente con il miglior algoritmo a disposizione. Un modo alternativo per definire i problemi NP è dire che sono quelli per cui **verificare** la soluzione (se si pone il problema in modo tale che si può dare una risposta sì/no) richiede tempo polinomiale. Per fare un esempio, immaginate di avere un insieme di numeri interi, positivi e negativi, e che vi si chieda se c'è un sottoinsieme la cui somma sia esattamente zero. Per risolvere il problema occorre provare tutti i gruppi di 2, 3, 4, ... n numeri, e quindi il costo computazionale è esponenziale, dell'ordine di 2^n; ma se il vostro nonno vi dice in sogno di provare un ben preciso insieme di numeri, potete vedere in fretta se sono effettivamente una soluzione.

Da decenni gli informatici cercano di capire se le due classi sono identiche (P = NP), e noi semplicemente non siamo in grado di trovare gli algoritmi buoni per risolvere i problemi NP in tempo polinomiale, o se sono diverse (P != NP; i matematici usano il simbolo ≠ per indicare “diverso", gli informatici per decenni hanno avuto tastiere poco pratiche e scrivono != senza nemmeno accorgersi della differenza) e quindi quei problemi sono davvero difficili. Si è scoperta un'intera classe di problemi, detti NP-completi e che si trovano spesso nella vita reale, per cui “risolto uno, risolti tutti", nel senso che c'è un algoritmo polinomiale che data la soluzione a uno di questi problemi ne ricava una per ciascuno degli altri; ma questo non ci porta a una soluzione. Se Delolalikar avesse effettivamente dimostrato che P != NP avremmo dovuto metterci il cuore in pace; anche quei problemi sono intrinsecamente difficili. Alla fine il consenso è stato che la supposta dimostrazione, che assemblavai risultati da branche diversissime della matematica, non fosse corretta; l'autore non guadagnerà così un milione di dollari, visto che questo è uno dei Millennium Problems.

Ma poi sarebbe stato davvero utile sapere che P != NP? Beh, non proprio. Nella vita reale ci sono algoritmi per la soluzione di problemi NP-completi che danno quasi certamente la soluzione in tempo

polinomiale, oppure che terminano quasi sempre in tempo polinomiale; insomma, all'atto pratico le soluzioni ce le troviamo comunque. Anche il problema attualmente più importante per tutta la crittografia, quello della fattorizzazione di un numero, potrebbe prima o poi avere una soluzione di questo tipo, anche se personalmente ne dubito. Resta il punto che anche gli esperti di teoria della complessità sono matematici; come dicevo all'inizio, a loro importa vedere il teorema dimostrato, anche se poi non lo useranno in pratica.

(9 agosto 2010)

41. La serie armonica

Molte successioni hanno una somma infinita, altre hanno una somma finita. La serie armonica va sì all'infinito, ma così piano che uno magari non se ne accorge nemmeno.

Eccovi due problemi a prima vista assolutamente scorrelati, ma che hanno fondamentalmente la stessa soluzione – nulla di strano in matematica, che è la scienza del riciclo dei concetti. Riuscite a vedere la somiglianza?

Nel primo problema si ha un mazzo infinito di carte (perfette, come sempre in questi problemi...), e si chiede qual è l'aggetto massimo che si possa avere, senza che le carte crollino miseramente. Per spiegarmi meglio, se avessimo solo due carte si può mettere quella in alto in modo che il suo baricentro sia esattamente sul bordo della inferiore; l'aggetto è pertanto di metà carta. Se abbiamo una terza carta sotto, possiamo mettere l'insieme delle prime due carte in modo che il *loro* baricentro sia esattamente sul bordo della terza carta: otteniamo così un aggetto totale di tre quarti di carta.

Il secondo problema vede una formica puntiforme che si muove lungo una barra, partendo dall'esterno. La barra è lunga un metro; in un secondo la formica percorre un centimetro, e alla fine di quel secondo la barra si allunga uniformemente di un altro metro, spostando quindi in avanti anche la formica che ora si trova a 198 centimetri dalla fine della barra. A ogni secondo capita lo stesso; la formica percorre un centimetro, e la barra si allunga uniformemente di un metro, spostando con sé la formica. Potrà mai la formica raggiungere la fine della barra? Se volete provare a risolvere i problemi, smettete di leggere adesso e fate un po' di conti.

In entrambi i casi la risposta è controintuitiva: l'aggetto può crescere a piacere, e la formica raggiungerà la fine della barra. Il tutto almeno in teoria. Per quanto riguarda il mazzo di carte, abbiamo visto che con due carte l'aggetto è 1/2 e con tre si somma 1/4; la quarta carta può contribuire per 1/6, la quinta per 1/8, e così via. Nel problema della barra, immaginiamo di cambiare scala ogni volta, per tornare alla lunghezza iniziale della barra; chiaramente la formica percorrerà una distanza minore. Dopo il primo allungamento con cambio di scala, nel minuto successivo la formica si muoverà quindi di mezzo centimetro; in quello ancora successivo (la barra è ora lunga tre metri) percorrerà 1/3 di centimetro, e continuerà così con 1/4, 1/5 e via camminando.

Entrambi gli esempi – per amor di precisione, il primo a meno di un fattore 2 – rappresentano la **serie armonica**, vale a dire la somma infinita

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + ...$$

Credo che la serie prenda il nome dal fatto che i vari termini corrispondono alle lunghezze relative delle

corde che suonano gli armonici di una nota, o almeno Wikipedia dice così. Come vedete, i termini della somma diventano sempre più piccoli e tendono a zero. Però ci tendono troppo lentamente, e quindi la somma ce la fa a crescere oltre ogni limite. Mostrarlo è piuttosto semplice; raggruppiamo i termini in questo modo.

1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + (1/9 + ... + 1/16) + ...
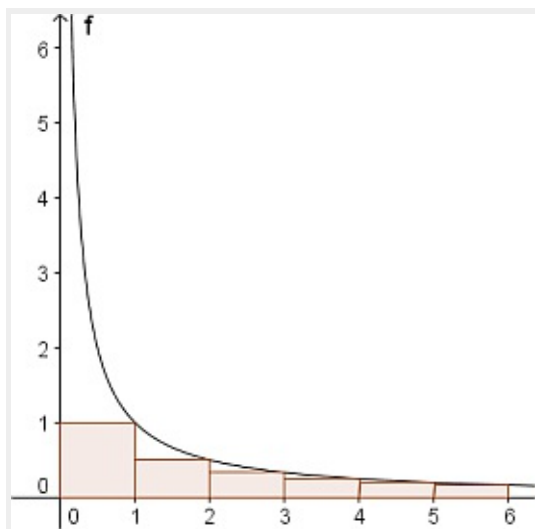
Figura 41.1: la serie armonica maggiorata da 1/x

All'interno di ogni parentesi sostituiamo tutti i numeri con il più piccolo del gruppo. Abbiamo pertanto nella prima parentesi (1/4 + 1/4) = 1/2, nella seconda quattro addendi 1/8 la cui somma è di nuovo 1/2, nella terza otto addendi 1/16 e quindi ancora 1/2... Adesso è immediato vedere che la somma è infinita. Se avete studiato un po' di analisi matematica, potete anche fare una stima un po' più precisa delle somme parziali della serie: come vedete nella figura qui sopra, la somma si può approssimare bene con la funzione $1/x$. Questo significa che la somma dei primi n termini della serie è maggiore dell'integrale tra 1 e n della funzione $1/x$, vale a dire $\log(n)$. Non solo questo ci conferma che la somma va all'infinito, ma ci dà anche un'idea di quanto piano ci va, come vedremo meglio più sotto. In effetti avremmo potuto spostare di un'unità a destra i rettangolini e ricavare che la somma è minore di $\log(n)+1$. Fu il solito Eulero a scoprire che la differenza tra la somma dei primi n termini della serie armonica e il logaritmo (naturale, mi raccomando! Non quello in base 10 che si impara al liceo!) di n tende a una costante, indicata con la lettera γ e nota come **costante di Eulero-Mascheroni**. Per i curiosi, γ vale circa 0,5772156649; non penso valga però la pensa di giocarsi questi numeri al lotto.

Il logaritmo è una funzione che va all'infinito moooolto lentamente, più lentamente di una qualunque funzione x^α per $\alpha > 0$. Ciò significa che nei nostri problemi iniziali non bisogna avere fretta; con un mazzo di 52 carte si può avere un aggetto massimo teorico di poco più di due carte, e un secondo mazzo aggiunge un terzo di carta. La nostra formica arriverà sì alla fine della barra, me le ci vorranno più di

10^{43} secondi. Formica longeva... ma si sa che le formiche puntiformi hanno caratteristiche peculiari.

Resta solo lo spazio per aggiungere che basta variare di pochissimo i parametri perché la serie risultante abbia una somma finita. Se per esempio si prendono i numeri $1/n^s$ con $s > 1$ la somma converge, per la cronaca al valore $\zeta(s)$ della zeta di Riemann; la somma degli inversi dei quadrati degli interi, come aveva già dimostrato... Eulero (gli piaceva così tanto lavorare sulle serie infinite), è al esempio $\pi^2/6$. Anche la somma degli inversi dei numeri che non contengono una delle dieci cifre è finita; il valore varia da 16,17696 circa nel caso si omettano tutti i numeri contenenti la cifra 1 a 23,10344 circa nel caso si ometta lo zero, che come ben si sa vale di meno. Queste successioni si chiamano successioni di Kempner, dal nome del primo che ne ha parlato, pur non essendo riuscito a stimarne la somma. Con il progresso matematico non solo si sono ottenuti questi valori, ma nel 2008 T. Schmelzer e R. Baillie hanno dimostrato che la somma degli inversi di tutti i numeri che non contengono all'interno una stringa definita, per esempio 31415926, è comunque finita, e sono riusciti anche a dare una formula per stimare questo valore. Per me la cosa è incredibile, non so per voi.

In compenso non ci crederete: ma la somma degli inversi dei *numeri primi*, che pur essendo infiniti non sono poi "così tanti", è infinita. La somma cresce ancora più lentamente, visto che è dell'ordine di log log *n*; ma è pur sempre una funzione che va all'infinito. Basta avere ancora meno fretta.

(11 agosto 2010)

42. Problemini matematici ferragostani

Ogni tanto anche il blog di matematica si prende qualche libertà.

Anche un blog risente delle stagioni. Quando pubblicai questo post mancavano due giorni a ferragosto, e non so quanta gente avesse ancora la voglia di stare a leggere questo blog di matematica. Ho così lasciato qualche problemino, così si poteva avere una buona scusa per non leggere; le risposte sono qui sotto. La difficoltà dei problemi è varia: non sono stati messi in ordine, perché io sono un tipo disordinato :-)

1. Questione di altezze

In un triangolo rettangolo, il prodotto delle tre altezze è la metà del prodotto dei tre lati. Di quanti gradi è l'angolo più piccolo del triangolo?

2. Derivata

Se avete fatto lo scientifico, saprete che la derivata di una funzione indica più o meno quanto cresce o decresce una funzione in ciascun suo punto; ad esempio la derivata di $f(x)=x^2$ è $f'(x)= 2x$. Cosa c'è allora che non va in questa dimostrazione, dove per comodità indico con D[] l'operazione di derivazione rispetto a quello che c'è tra le parentesi quadre e suppongo di calcolare la derivata per un valore intero positivo di x (altrimenti il primo passaggio non funziona)?

```
D[x^2] = D[x + x + ... + x (x volte)]
   = D[x] + D[x] + ... + D[x] (x volte)
   = 1 + 1 + ... + 1 (x volte)
   = x
```

3. Osservazioni

Menelao guarda Elena, Elena guarda Paride. Menelao è sposato, Paride no. C'è una persona sposata che guarda una persona non sposata, sì o no? Oppure non è possibile dirlo con certezza?

4. Centro di gravità permanente

Supponiamo di avere una brocca vuota di forma qualsiasi, il cui centro di gravità sia più alto del suo fondo. Iniziamo ora a versarci dentro dell'acqua finché il centro di gravità della brocca con l'acqua si trova al suo minimo. Dimostrate che tale centro di gravità si trova sulla superficie dell'acqua.

5. Fermat alla rovescia

Come sapete, Andrew Wiles ha finalmente dimostrato l'"ultimo teorema di Fermat": mentre per n=2 ci

sono infinite soluzioni intere positive all'equazione $a^n + b^n = c^n$, quando n è maggiore o uguale a 3 non ce n'è nessuna. Naturalmente non vi chiedo di dimostrare *quel* teorema: però potreste cimentarvi con un “Fermat alla rovescia”. Considerate l'equazione $n^a + n^b = n^c$: dimostrate che ha infinite soluzioni intere positive per n=2, e non ne ha nessuna quando n è maggiore o uguale a 3.

Soluzioni:

1. Questione di altezze

In un triangolo rettangolo due delle tre altezze coincidono con i cateti. Quindi il problema si riduce a costruire un triangolo rettangolo per cui l'altezza h relativa all'ipotenusa sia la metà dell'ipotenusa stessa c. Ma è noto – e se non lo fosse basta considerare che i triangoli ACB, DBC e ADC sono simili – che l'altezza è il medio proporzionale dei due segmenti in cui essa divide l'ipotenusa; quindi otteniamo che la divide in realtà a metà. Il nostro triangolo pertanto non è solo rettangolo ma anche isoscele, e l'angolo più piccolo – anzi i **due** angoli più piccoli, essendo uguali – misura 45 gradi.
Meglio ancora, forse, accorgersi che in un quadrato le diagonali si dividono a metà; quindi il triangolo rettangolo isoscele ottenuto prendendo solo mezzo quadrato soddisfa le ipotesi.
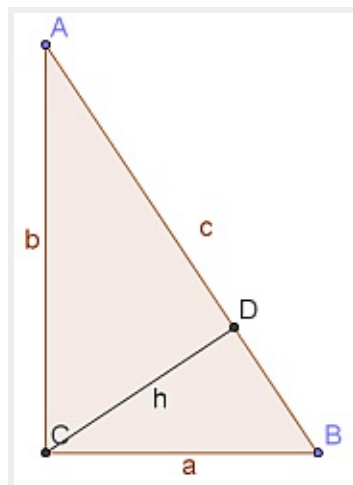
Figura 42.1: le tre altezze di un triangolo rettangolo

2. Derivata

L'errore è nel secondo passaggio. È vero che la derivata della somma di più funzioni è uguale alla somma delle derivate delle singole funzioni; ma in questo caso il numero di funzioni non è fisso ma anch'esso variabile, quindi non si può applicare quella regola.

3. Osservazioni

A prima vista si direbbe che non è possibile sapere con certezza se c'è una persona sposata che ne guarda una non sposata, perché non sappiamo nulla dello stato coniugale di Elena. Riguardando il problema con maggiore attenzione, però, ci accorgiamo che ci sono due casi possibili: Elena è sposata, oppure Elena non è sposata. Nel primo caso, Elena che è sposata guarda Paride che non è sposato; nel secondo caso Menelao che è sposato guarda Elena che non è sposata. Quindi possiamo dire che una persona sposata ne guarda una non sposata, anche se non possiamo dire chi siano le due persone.

Gli esperti dicono che questo problema di logica risulta particolarmente difficile perché noi evitiamo se possibile il **ragionamento disgiuntivo completo** (quello indicato nella dimostrazione), perché più pesante da calcolare, preferendo un ragionamento euristico – in questo caso valutare le due coppie lasciando come "sconosciuto" lo stato di Elena – che di solito funziona lo stesso ed è molto più veloce, ma in alcuni casi non ci dà la risposta corretta.

4. Centro di gravità permanente

Quando la brocca è vuota, abbiamo detto che il centro di gravità è sopra il fondo, e quindi sopra il livello dell'acqua che non essendoci coincide col fondo stesso. Se riempissimo la brocca fino all'orlo, il centro di gravità sarebbe sotto il livello dell'acqua. Visto che versando l'acqua sia il centro di gravità che il livello dell'acqua si muovono in modo continuo, ci sarà un momento in cui i due valori coincideranno. Ma sia prima che dopo quel momento il centro di gravità era più alto, perché prima c'era dell'aria nella sezione tra il pelo dell'acqua e il centro di gravità, e dopo abbiamo aggiunto dell'acqua sopra il centro di gravità.

5. Fermat alla rovescia

Per quanto riguarda l'equazione di "Fermat alla rovescia" $n^a + n^b = n^c$, se $n = 2$ ci sono le infinite soluzioni in cui a=b=c-1, come per esempio $2^5 + 2^5 = 2^6$. Nel caso $n \geq 3$, il modo più semplice per vedere che non ci sono soluzioni è scrivere n^a e n^b in base n; saranno pertanto della forma 1000...000, con rispettivamente a e b cifre 0 nell'espressione indicata. Ora, se sommiamo questi due numeri ne otterremo uno della forma 1000...0001000...000 se $a \neq b$ e 20000....000 se $a=b$; in ogni caso, la risposta non è una potenza di n.

(A quanto ne so, questo problema è stato proposto da Douglas Hofstadter in *Gödel, Escher, Bach*)

(13 e 21 agosto 2010)

43. I numeri ordinali

Tra i numeri infiniti nella teoria di Cantor non ci sono solo i cardinali, ma anche gli ordinali, che usiamo quando non ci basta sapere quanti elementi ci sono ma anche in quale ordine stanno.

Ebbene no! Non avevo finito di parlare dei numeri infiniti! Nella teoria cantoriana, infatti, ci sono **due** tipi diversi di infiniti: quello dei numeri cardinali, quelli di cui si sente generalmente parlare, e quello dei numeri *ordinali*, i fratelli sfigati che restano sempre in ombra. Per una volta, cerchiamo di alzare le luci della ribalta anche su di loro.

Tanto per cominciare, i numeri ordinali sono un concetto assolutamente standard anche nella matematica che si studia a scuola, e li si trova persino nella vita di tutti i giorni. Quando parliamo della regina Elisabetta II o di papa Benedetto XVI, usiamo dei numeri ordinali ("secondo" e "sedicesimo"); detto in altro modo, abbiamo messo **in ordine** (di data in cui hanno assunto il potere) i monarchi inglesi di nome Elisabetta e i sommi pontefice di nome Benedetto, e abbiamo visto in che posto si situava la persona di cui stavamo parlando. Anche quando mangiamo la quinta fetta di torta le abbiamo ordinate seguendo il tempo in cui ce le siamo portate alla bocca – e anticipando una probabile indigestione, ma di queste cose la matematica non si occupa.

Finché si ha a che fare con i numeri finiti, non è che ci sia una grande differenza tra i numeri ordinali e quelli cardinali, a parte il nome che si dà loro; in fin dei conti, se prendiamo un insieme di 42 elementi in qualunque modo li si metta in ordine l'ultimo sarà sempre il quarantaduesimo, non ci piove. Gli ordinali che troviamo in questo modo sono di tre tipi: c'è lo 0, che deve essere postulato perché da qualche parte bisogna pure iniziare, anche se mettere in ordine zero elementi può dare qualche problema a chi non è aduso alle mirabolanti proprietà dell'insieme vuoto. Poi ci sono i cosiddetti **ordinali successori**; proprio come avere papa Benedetto XVI ci fa capire che ci deve essere stato un suo predecessore di nome Benedetto XV, così l'ordinale chiamato 42 è il successore di un altro ordinale (il 41, come sicuramente avrete intuito).

Ma appena arriviamo all'infinito, come ormai avrete capito capita molto spesso, le cose assumono tutto un altro aspetto. Per prima cosa, ci sono degli ordinali infiniti? Beh, sì: se prendiamo ad esempio tutti i numeri interi li possiamo mettere in ordine crescente, e la successione (1, 2, 3, 4, 5...) è (corrisponde a) un numero ordinale per la nostra definizione. Di quale numero ordinale questa successione è il successore? Beh, il numero "infinito meno uno" si direbbe non esistere (ma aspettatevi delle sorprese). In effetti il nostro numero ordinale transfinito, che è chiamato ω, fa parte di una terza classe, quella degli **ordinali limite**. Il limite di tutti gli ordinali finiti è appunto ω. Avete notato? Niente lettere ebraiche. Si ritorna al greco, anche se si usa l'ultima lettera dell'alfabeto; scelta parecchio infelice, come vedremo poi. Il fatto di averlo chiamato in modo diverso dal più piccolo cardinale transfinito vi dovrebbe far

risuonare un campanellino in testa; in effetti è proprio così, ma vedremo la prossima volta come questo campanellino suonerà freneticamente.

(17 agosto 2010)

44. Le medaglie Fields 2010

Assegnati i prestigiosi premi per i matematici "giovani". Nemmeno stavolta una donna tra i premiati.

Le medaglie Fields (dal nome di un matematico canadese la cui maggiore capacità fu il convincere i politici dell'importanza della materia) sono credo l'unico premio per matematici che è noto anche al grande pubblico. Quello che il grande pubblico forse non sa è che sono un premio assegnato da matematici a matematici: vengono infatti assegnate ogni quattro anni durante il Congresso Internazionale dei Matematici, che quest'anno si è tenuto in India. Stavolta è stato premiato il numero massimo di persone, quattro; in passato (nel 1936 e dal 1950) ci sono stati da due a quattro vincitori.

La seconda caratteristica delle medaglie Fields è che premiano matematici "giovani", che non abbiano compiuto i quarant'anni. Noticina: la leggenda che nessuno possa scoprire qualcosa di nuovo in matematica dopo i 25-30 anni è appunto una leggenda. Quarant'anni fa i campioni di nuoto erano praticamente tutti sotto i venti anni, e c'era chi "dimostrava" che il nuoto era sport per ragazzi (e per bianchi) perché poi le ossa si appesantivano. Non appena arrivarono i nuovi ricchi sponsor, miracolosamente la struttura ossea umana mutò e si videro trentenni e oltre continuare a vincere... (e c'è stato almeno un nero che vinse una gara ai mondiali) In matematica non si possono usare i soldi in questo modo, ma comunque oggi ci sono molti più stimoli, non solo di tipo economico, che prolungano il periodo produttivo degli scienziati. D'altra parte è vero che per la maggior parte dei matematici, proprio come per la maggior parte degli artisti, il periodo con le *idee* più innovative è la gioventù: con gli anni si acquista il mestiere e si possono ottenere grandi risultati, ma senza il lampo di novità. Ecco quindi che ha senso riservare un premio a chi è ancora nel fiore dell'età: premio non certo venale, visto che al momento ammonta a circa 12000 euro.

I matematici premiati arrivano da tutto il mondo: Elon Lindenstrauss è israeliano; Cédric Villani francese; Ngô Bảo Châu è vietnamita (anche se naturalizzato francese), e infine Stanislav Smirnov è russo. Non è una questione di bilancino geopolitico: la matematica è una scienza davvero globale e quindi è normale non solo che la si porti avanti in tutto il mondo ma che i bravi scienziati trovino un posto ben lontano dalla patria. Lindenstrauss e Ngô hanno una cattedra a Princeton (il primo all'università, il secondo all'Institute for Advanced Studies) e Smirnov all'università di Ginevra, anche se i primi due insegnano anche in patria; solo Villani è direttore dell'Institut Henri Poincaré a Parigi. I loro campi di studio sono la teoria dei numeri (probabilmente la matematica più pura che c'è), ma anche la fisica matematica e la teoria della probabilità; si direbbe una loro caratteristica cercare di mettere insieme cose che sembrano diversissime tra loro, e probabilmente questo è un segno delle loro capacità.

Anche stavolta nessun italiano è stato premiato; l'unico nostro connazionale ad aver vinto la medaglia

Fields è stato Enrico Bombieri, anche lui teorico dei numeri, nel lontano 1974. Non credo nemmeno sia colpa dei baroni universitari italiani; un bravo ricercatore fa appunto in fretta a trovarsi un lavoro all'estero. Più probabile che la scuola matematica italiana, che cent'anni fa era la seconda o terza al mondo, oggi si sia molto affievolita; e purtroppo non ci mancano solo le punte ma anche la conoscenza e la consapevolezza delle nozioni di base per chi non intende laurearsi in matematica ma comunque dovrebbe averla studiata a scuola. Peggio ancora però notare come in tutta la storia non sia mai stata premiata nessuna donna. Sarà proprio vero che le donne non sanno fare matematica di punta, o la fanno in età relativamente tarda e quindi non possono concorrere al premio? Lasciatemi dubitare della cosa; forse è più probabile un innato maschilismo.

(19 agosto 2010)

45. Aritmetica con gli ordinali

Finché ci si limita a valori finiti, i numeri ordinali non sembrano poi così diversi dai cardinali. Non appena si giunge all'infinito, però, le cose cambiano di colpo, e anzi gli ordinali sono ancora più sconcertanti dei cardinali.

Abbiamo visto come i numeri ordinali corrispondano a un insieme di numeri “messi in ordine”, a differenza dei numeri cardinali che dell'ordine non si curano e sono quelli che usiamo di solito: se ho cinque caramelle in genere non mi interessa sapere qual è la prima, a meno che io non voglia iniziare con quella che mi piace di più. Finché ci limitiamo ai numeri finiti non ci sono grandi differenze; a un ordinale dato corrisponde uno e un solo cardinale. Quando però si passa all'infinito non si sa mai cosa possa capitare, e il fatto che il più piccolo ordinale transfinito, ω, abbia un nome diverso dal più piccolo cardinale transfinito, $\aleph_0$ dà qualche sospetto. E in effetti...

Sappiamo che un numero ordinale si può rappresentare come un insieme ordinato, e che c'è un ordinamento canonico che viene associato. L'ordinale standard per 5 è così (1,2,3,4,5), mentre quello per ω è dato da (1,2,3,4,...). Attenzione, però: (1,2,3,4,5), (5,4,3,2,1), (42, 314, 1, π, “pippo”) sono in realtà lo stesso numero ordinale. Non importa infatti quali etichette vengono associate agli elementi dell'insieme; ciò che conta è che ce n'è uno che non ha nessun elemento alla sua sinistra, un altro che ne ha uno, un altro ancora che ne ha due, e così via. Andiamo ora avanti a definire le operazioni aritmetiche standard.

La definizione di somma di due ordinali è la loro giustapposizione, il che sembrerebbe ovvio. Proviamo allora a sommare 1+5: se scriviamo i numeri in forma canonica abbiamo (1) e (1,2,3,4,5) che non è bello perché ci sarebbero due numeri uguali nell'insieme somma, e non sappiamo bene che farci. Per semplicità userò un carattere diverso, e avremo così (*1*) e (**1**,**2**,**3**,**4**,**5**), che giustapposti danno (*1*,**1**,**2**,**3**,**4**,**5**), che possiamo riscrivere come (1,2,3,4,5,6), cioè 6. Non ci credevate, vero? Ripeto, nel caso di numeri finiti non c'è nulla di strano, e tutta questa storia sembra un'inutile complicazione.

Passiamo ora a sommare 1+ω; otterremo (*1*,**1**,**2**,**3**,**4**,...) che riscritto in maniera canonica è evidentemente ancora ω. Anche qui nulla di strano, per noi che siamo ormai abituati all'aritmetica dei numeri transfiniti. Proviamo però a sommare ω+1. No, non è la stessa cosa di prima; nessuno ci assicura che valga la proprietà commutativa dell'addizione, che cioè $a+b=b+a$ come capita nella nostra aritmetica usuale. La somma è (**1**,**2**,**3**,**4**,...,*1*); il secondo 1, quello scritto in corsivo, appartiene a una classe di numeri diversa dagli altri, visto che non ha nessun predecessore: ricordatevi che non esiste il “numero infinito”! Abbiamo scoperto due cose: che nella somma di ordinali infiniti non vale la proprietà commutativa dell'addizione e che c'è un nuovo numero ordinale, ω+1, la cui cardinalità è $\aleph_0$ proprio come ω. Beh, ce ne saranno almeno infiniti altri, visto che ω+2, ω+3, ..., ω+ω, ω+ω+1, ... sono tutti diversi.
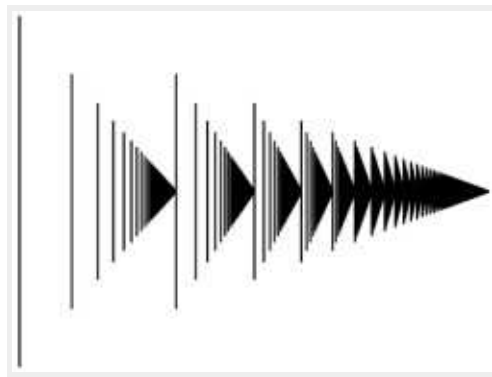
Figura 45.1: visualizzazione grafica di $\omega \cdot \omega$ (da Wikipedia)

Ma è ora di passare alla moltiplicazione. Il prodotto di due ordinali è l'insieme formato dalle *coppie* (ordinate) di un elemento del primo e uno del secondo insieme. Così 2·3, cioè (1,2)·(1,2,3), è dato da ((1,1),(2,1),(3,1),(1,2),(2,2),(3,2)), che tanto per cambiare vale 6. Forse avete già capito come va a finire; se calcoliamo $2 \cdot \omega$ otteniamo ((1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),...) che è sempre ω, ma se calcoliamo $\omega \cdot 2$ otteniamo ((1,1),(2,1),(3,1),...,(1,2),(2,2),(3,2),...) che è tutta un'altra roba, ed equivale a $\omega+\omega$; "due volte infinito", che naturalmente ha sempre $\aleph_0$ come cardinalità ma è però diverso come numero ordinale. Vi risparmio tutte le definizioni di moltiplicazione sinistra e destra e cose del genere; se proprio volete vedere cosa succede, come sempre Wikipedia è la vostra amica. I disegnini che vedete qui nel testo arrivano da là, tra l'altro.

Come $\omega+\omega$ dà $\omega \cdot 2$, possiamo anche pensare all'esponenziale; $\omega \cdot \omega$ dà ω^2. Si può proseguire, arrivare a ω^3, ω^4, ..., ω^ω, un ordinale piuttosto grande la cui cardinalità è... $\aleph_0$. Se ci pensate su, non è poi così difficile crederlo. È sempre la storia dell'albergo di Hilbert; gli infiniti bus che arrivano ciascuno con infiniti passeggeri corrispondono a ω^2, ma anche se ci fosse un infinito numero di caratteristiche diverse (infiniti bus di infinite società diverse da infinite città di infiniti pianeti di infinite galassie...) il Bravo Direttore d'Albergo del post numero 16 potrà comunque trovare un buon ordinamento e assegnare a ciascuno degli ospiti una stanza tutta per lui, fregandosi le mani per i soldi guadagnati.
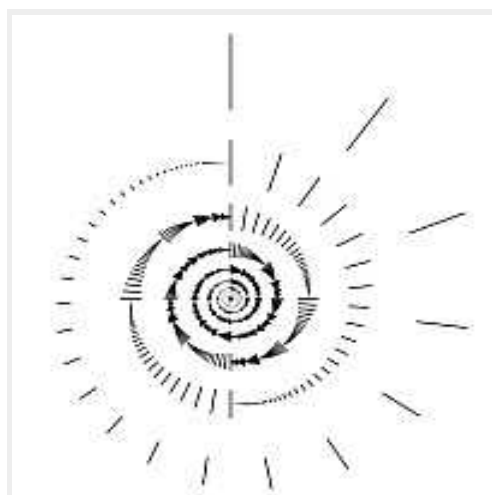
Figura 45.2: visualizzazione grafica di ω^ω (da Wikipedia)

Nessuno ci obbliga a fermarci qua, ovvio; acendo una torre infinita di potenze ω, ω^ω, $\omega^{(\omega^\omega)}$, ... si arriva a un nuovo numero ordinale, denominato ε_0. Sì, proprio epsilon, la lettera greca che in genere indica un numero piccolo a piacere. Ma in effetti ε_0 è il più piccolo numero che non può essere costruito a partire da ω con un numero finito di operazioni di addizione, moltiplicazione ed esponenziazione; oppure se preferite la più piccola soluzione dell'equazione $k = \omega^k$; un'altra di quelle cose che con i numeri cardinali non erano possibili, visto che la cardinalità di 2^k è sempre strettamente maggiore di quella di k. ε_0 è anche importante perché è il primo ordinale che... Chi è stato laggiù in fondo a dire «che ha la cardinalità del continuo?» Beh, ha sbagliato. Anche ε_0 ha cardinalità $\aleph_0$. Esistono ordinali di cardinalità diversa, come ω_1 che è formato dall'unione di **tutti** gli ordinali di cardinalità $\aleph_0$, ma che io sappia non si usano molto, anche perché nessuno saprebbe come fare un buon ordinamento di questo insieme. L'importanza di ε_0 sta nel fatto che non si può applicare il metodo d'induzione (transfinita, per la precisione) per arrivarci; ne escono fuori conseguenze interessanti come il teorema di Goodstein che è un esempio pratico del teorema di indecibilità di Gödel.

Certo che parlare di “esempio pratico” è probabilmente una presa in giro; nulla di quanto scritto ha un qualsivoglia uso nella vita di tutti i giorni. Cantor sviluppò la teoria degli ordinali per avere una grana un po' più fine quando si tratta con gli insiemi infiniti; gli ordinali hanno il loro spazio nella teoria dei giochi (intesi come “plays”, non “games”) ma anche in questo caso effetti pratici ce ne sono pochi. È però interessante accorgersi che spesso è possibile fare generalizzazioni (nel nostro caso dal finito all'infinito, mediante cardinali e ordinali) completamente diverse ed entrambe valide. La matematica permette anche una certa libertà, insomma.

(25 agosto 2010)

46. Chomp

Chomp è un gioco goloso in cui si mangia man mano una tavoletta di cioccolato. La strategia ottimale per giocarci è sconosciuta, ma si sa chi vincerà se entrambi gli avversari operano al loro meglio: uno dei soliti trucchetti dei matematici per dire le cose senza saperle.

Se siete due golosi e non avete paura di impiastricciarvi le mani, potete provare questo gioco. Prendete una tavoletta di cioccolato di quelle formate da tanti quadretti, e alternatevi nello staccarne via un pezzo per mangiarvelo. L'unica regola da seguire è che ciascun giocatore sceglie un quadretto e se lo mangia insieme a tutti quelli rimasti al di sopra e alla destra. Attenzione, però! Sul quadretto in basso a sinistra è stato messo abbastanza Guttalax da far trascorrere un pomeriggio intero a dover scaricare l'intestino: colui al quale tocca prendere quel quadretto ha dunque perso la partita. Visto che un disegno vale più di mille parole, qui sotto c'è un esempio pratico di partita, in cui il giocatore A, quello che inizia, perde la partita. Preferite giocare per primi o per secondi?
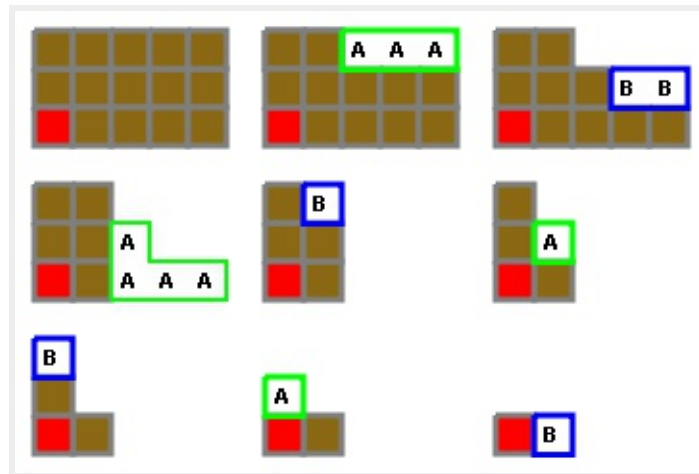
Figura 46.1: una partita a Chomp

Il gioco in questione si chiama Chomp, ed è stato chiamato così da David Gale, che l'ha (ri)scoperto nei primi anni '70; ma già nel 1952 Fred Schuh aveva proposto un gioco simile, con l'unica differenza che invece di quadretti di cioccolato venivano usati i divisori di un numero... roba molto meno dolce, insomma. Il gioco è *imparziale*, vale a dire che data una configurazione, ciascun giocatore – se tocca a lui giocare – ha a disposizione esattamente le stesse mosse (a differenza per esempio degli scacchi, in cui chi ha i pezzi bianchi non può muovere quelli neri), e *a informazione perfetta*, nel senso che ciascun giocatore sa esattamente cosa può fare l'avversario (a differenza per esempio del poker, in cui le carte dell'avversario sono ignote, e di un qualunque gioco in cui ci siano mosse aleatorie, che dipendano cioè per esempio da un lancio di dadi). Infine il gioco termina in un numero finito di mosse, e uno dei due giocatori deve per forza vincere: il pareggio non è ammesso.

Se si escludono i casi banali di tavolette lineari $1\times n$ – il primo giocatore mangia tutti i quadretti tranne uno – e forse di quelle $2\times n$, non si conosce nessuna strategia compatta che uno dei giocatori può seguire

per essere certo di giungere alla vittoria; il sistema più semplice è dare in pasto a un computer la posizione iniziale e fargli macinare un po' i dati, per tirare fuori il manuale di istruzioni con la mossa giusta a seconda della configurazione. Il gioco sembrerebbe insomma non dico equo ma giocabile, e in effetti in pratica è così. Ma i matematici sono degli esseri spregevoli che amano rovinare le sorprese, e hanno dimostrato che per una qualunque tavoletta con almeno due quadratini di cioccolato il primo giocatore ha la garanzia di poter sempre vincere!

Il modo per provare tale risultato è tipico della categoria dei matematici: una dimostrazione per assurdo, che non dice nulla di positivo ma si limita a tarpare le ali ai tentativi di trovare una risposta differente. In questo caso forse la cosa è addirittura peggiore: vediamolo subito. Innanzitutto, occorre sapere che esiste un teorema (usualmente attribuito a Ernst Zermelo, anche se in realtà lui aveva studiato un caso leggermente diverso) che afferma che nei giochi imparziali, a informazione perfetta e finiti possono darsi solo tre casi: il primo giocatore ha una strategia vincente, il secondo giocatore ha una strategia vincente, entrambi i giocatori possono strappare la patta. Nel nostro caso, visto che la patta è impossibile, valgono solamente i primi due casi; il modo più semplice per dimostrarlo consiste nell'andare a ritroso partendo dalle configurazioni finali.

Supponiamo ora che il secondo giocatore abbia una strategia vincente; essa deve per definizione valere per qualunque mossa iniziale del primo giocatore, compresa quella minimale che consiste nel mangiarsi solo il quadretto in alto a destra. Se però ci pensate su un attimo, qualunque sia la risposta ottimale a quella mossa il primo giocatore avrebbe potuto farla subito lui: togliere quel singolo quadretto è infatti una mossa neutra, nel senso che tutte le altre mosse lo tolgono. Insomma, il primo giocatore vince con la tecnica del **furto di strategia** (“strategy stealing” in inglese). Cosa esattamente rubi non si sa, ma sicuramente ruba.

Sono parecchi i giochi a cui si può applicare il furto della strategia: esempi classici sono quelli (imparziali e a informazione perfetta) in cui occorre completare una configurazione data prima dell'avversario, come il tris e il cinque-in-fila (su un foglio quadrettato occorre mettere cinque simboli in fila orizzonatale, verticale o diagonale). In questo caso si ragiona così: se il secondo giocatore avesse una strategia vincente, basta fare una prima mossa qualunque – che male non fa – e far finta di essere il secondo giocatore. Se mai nel corso della partita toccasse fare la mossa iniziale, basterebbe farne un'altra volta una a caso. In questi casi non è garantita la vittoria, ma la patta almeno sì, come nel caso del tris: meglio che nulla. E non venitemi a chiedere «ma se anche il secondo giocatore fa una mossa a caso, per tornare ad essere il secondo?» Il punto è proprio la strategia cercata non può esserci!
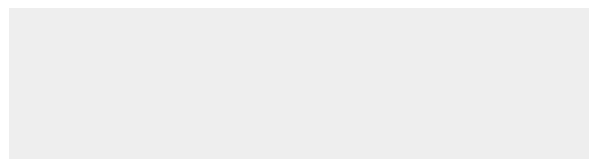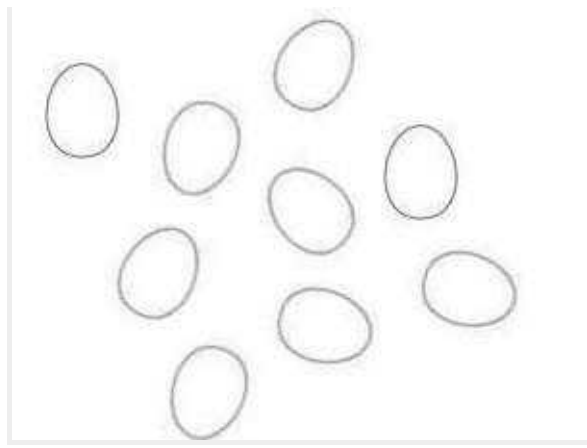
Figura 46.2: un gioco con le uova

Termino lasciandovi con un giochino, «L'uovo di Colombo». Immaginate di avere un tavolino rettangolare e un certo numero di uova, tutte uguali nella forma. Ogni giocatore posa un uovo sul tavolo, senza toccarne o spostarne nessun altro; il primo che non ha più spazio per aggiungere un nuovo uovo ha perso. C'è uno dei giocatori che ha a disposizione una strategia vincente? E se sì, è anche possibile descriverla?

(31 agosto 2010)

47. Fullerene

Il 4 settembre 2010 Google ha ricordato i venticinque anni della scoperta del fullerene modificando il suo logo. Ma quali sono le proprietà matematiche della struttura molecolare del fullerene?

Come ha ricordato la Mucca di Schrödinger, il 4 settembre 2010 Google ha modificato il proprio logo, come gli capita spesso di fare per ricordare qualche anniversario. Stavolta c'era una palla arancione che diventava una specie di pallone da calcio stilizzato che ruotava. Il logo però non celebrava l'inizio dei campionati nazionali di calcio, ma i venticinque anni dalla scoperta della molecola del fullerene. Di fullereni ce ne sono però tanti... e tutto per colpa delle regole di geometria solida!
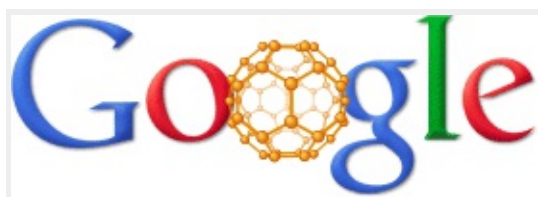
Figura 47.1: il Google Doodle con il buckminsterfullerene

Innanzitutto ricordo che generalmente quando si parla di fullerene si intende una molecola di carbonio in cui gli atomi sono disposti in maniera particolare, in modo da formare una struttura cava all'interno; l'esempio più famoso è la molecola C_{60}, quella appunto a forma di pallone da calcio la cui struttura è formata da dodici pentagoni e venti esagoni e il cui nome completo è buckminsterfullerene, dal nome dell'architetto Richard Buckminster “Bucky” Fuller che è noto per aver introdotto strutture di questo tipo per creare delle cupole leggere e resistenti. Il buckminsterfullerene è la versione molecolare più facile da trovare anche in natura; i chimici sono però riusciti a costruire anche altri tipi di molecole con lo stesso tipo di struttura, e se vogliamo anche i nanotubi sono comunque dei fullereni derivati. Se volete saperne di più, come sempre potete partire da Wikipedia.

Ma la struttura reticolare dei fullereni è piuttosto interessante anche da un punto di vista matematico, che è poi quello che mi interessa in questa sede. Forse sapete che, mentre ci sono infiniti poligoni regolari – quelli con tutti i lati e gli angoli uguali – i poliedri regolari sono solo cinque: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro. Soprattutto, non esiste nessun poliedro regolare composto da esagoni. La ragione è molto semplice: per fare un poliedro si parte da un vertice e bisogna metterci almeno tre poligoni. Ma gli angoli di un esagono regolare sono di 120 gradi: questo significa che con tre esagoni abbiamo riempito il piano e non abbiamo spazio per “alzare” il vertice, come avviene ad esempio con i pentagoni, ottenendo il dodecaedro. Ma questo svantaggio porta a un vantaggio se non siamo interessati ad avere un poliedro *regolare*! Infatti partendo dal dodecaedro in cui in ciascun vertice concorrono esattamente tre pentagoni è possibile aggiungere qua e là degli esagoni, che come abbiamo visto non “piegano lo spazio”, e tirare fuori un nuovo solido un po' meno spigoloso del dodecaedro, che può andare

abbastanza bene come dado per giocare a D&D ma non per dare quattro calci al pallone.
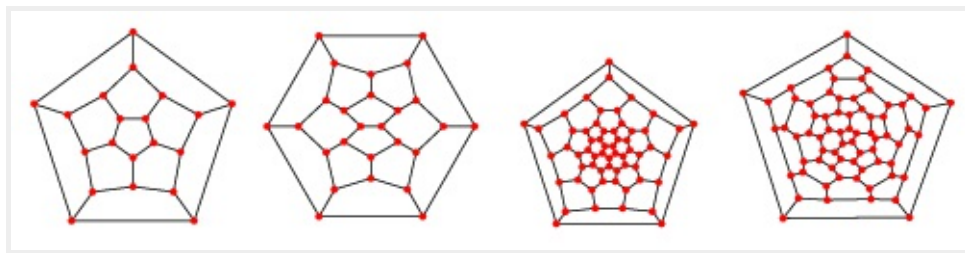
Figura 47.2: grafi di diversi fullereni (da Mathworld)

Il buckminsterfullerene è il più regolare di questi solidi; è infatti uno dei tredici solidi archimedei e può essere anche chiamato icosaedro troncato, visto che lo si può ottenere tagliando via i dodici vertici dell'icosaedro facendo i conti abbastanza bene in modo tale che i venti esagoni rimanenti e i dodici pentagoni testè creati abbiano gli spigoli tutti congruenti. Nella figura qui sopra, tratta dalla voce Fullerene di Mathworld, vediamo alcuni esempi di grafi corrispondenti ad alcuni fullereni; in pratica si è tolta loro una faccia e li si è spianati, deformando le altre facce. Qualcuno potrebbe stupirsi di vedere tra gli esempi anche il dodecaedro, che di esagoni non ne ha, lì in mezzo; è solo l'ennesimo esempio di come l'insieme vuoto non dia nessun problema ai matematici, e anzi venga sempre tenuto in gran conto. Zero esagoni sono "un certo numero di esagoni", insomma; la cosa più divertente, se volete, è che possiamo ottenere fullereni con un numero pari qualunque di vertici oltre i venti originari del dodecaedro (zero è un numero pari, sì), *eccetto due*. Detto in altro modo, non c'è nessun fullerene con 22 vertici. Il numero di poliedri possibili cresce molto velocemente con il numero di vertici, ma naturalmente quasi tutti quelli che si ottengono sono deformi e quindi non certo belli da vedersi; ecco perché nessuno ne parla mai.

Un'ultima osservazione, chimica e non matematica: se vi siete chiesti com'è possibile che il carbonio, che ha valenza 4, possa formare una struttura dove tutti i vertici hanno solo tre spigoli concorrenti la risposta è semplice. Gli spigoli in comune con due esagoni hanno un legame doppio, mentre quelli che uniscono un esagono e un pentagono ce l'hanno singolo. Anche stavolta, insomma, la matematica corre in aiuto del mondo reale... o è il viceversa?

(6 settembre 2010)

48. Il paradosso delle due buste

Noi siamo generalmente convinti di conoscere perfettamente i numeri, e di cavarcela abbastanza bene la probabilità elementare; ma in effetti basta un semplicissimo esempio per confonderci le idee.

Carlo e Alice sono stati invitati a partecipare a un esperimento scientifico. Su un tavolo sono state poste due buste, A e C; i due amici devono sceglierne una per ciascuno. I due vengono poi separati, in modo che non possano comunicare tra di loro, e li si invita ad aprire la busta, che contiene un assegno. A questo punto i ricercatori comunicano a ciascuno che gli assegni nelle due buste sono di valore uno il doppio dell'altro, senza specificare quale sia il maggiore; chiedono quindi loro se intendono cambiare o no la propria busta con l'altra. Supponiamo che Alice abbia scelto la busta A, che contiene un assegno di a euro; il suo ragionamento è più o meno il seguente. «Ho una probabilità del 50% di avere preso la busta con l'assegno maggiore, e quindi cambiando busta avrei solo $a/2$ euro; ma ho la stessa probabilità di aver preso la busta con l'assegno minore, e quindi cambiando busta avrei ben $2a$ euro. La media è $(5/4)a$ euro, quindi mi conviene cambiare». Carlo però, con la sua busta C che ha un assegno di c euro, può fare esattamente lo stesso ragionamento; anche per lui il ricavo probabile cambiando busta è $(5/4)c$ euro contro i c euro attuali, e quindi vorrà farlo anche lui. Ma come è possibile che per entrambi convenga cambiare busta?

Il modo più semplice di disinnescare il paradosso è quello di immaginare che gli assegni abbiano una coppia di valori scelti casualmente, ma comunque inferiori a una certa cifra; diciamo 100 euro per fissarci le idee. Questo significa che il valore dell'assegno minore sarà compreso tra un centesimo e 50 euro, mentre l'altro varrà tra due centesimi e 100 euro. (Il caso zero lo possiamo escludere, visto che tanto il doppio di zero è sempre zero e quindi da un lato è irrilevante cambiare o no busta, dall'altro i ricercatori passerebbero un brutto quarto d'ora se solo provassero a fare uno scherzetto del genere). Avrete già capito che non è più vero che sia impossibile sapere quale busta è stata scelta; se l'assegno è di 42.85 euro è quella minore, perché non possiamo avere mezzi centesimi, mentre se è di 90 euro è quella maggiore.

Se ci si mette a fare i conti attentamente, cosa che vi risparmio – se proprio volete, Wikipedia li ha tutti – è possibile dimostrare che la cosa vale anche usando numeri reali compresi tra i valori interi positivi n e N, con $N > 2n$; più precisamente, immaginando che la busta minore contenga tra n e $N/2$ euro, possiamo calcolare come con un valore compreso tra n e $2n$ euro convenga cambiar busta, con un valore tra $N/2$ e N euro convenga tenersela, e con un valore intermedio la cosa sia indifferente. Si potrebbe pertanto pensare che facendo scendere n a zero e crescere N all'infinito abbiamo ottenuto la nostra risposta; però io personalmente eviterei di accettare pedissequamente una generalizzazione di questo tipo. Spesso infatti il passaggio all'infinito non rispetta affatto le regole valide per i numeri finiti!

La mia risposta personale al paradosso è che tanto non è possibile dare una distribuzione di probabilità uniforme se si ha un numero infinito di valori tra cui scegliere. Anche nel caso apparentemente più semplice di soli valori interi, e quindi un'infinità numerabile di possibilità, la probabilità di pescare un ben definito valore è zero, il che non ci porta troppo lontano. Voi che ne pensate?

(11 settembre 2010)

49. Parole matematiche: integrale

L'area al di sotto di una curva e le pagnotte che mangiano i salutisti hanno effettivamente qualcosa in comune, anche se la prima può far stare molto peggio delle seconde.

In analisi matematica, anzi più correttamente nel calcolo infinitesimale, si parla di **derivata** e **integrale**. La derivata non dà nessun problema di etimologia: è una funzione "derivata" da quella originale. Però, per uno di quei casi che possono capitare nelle scienze, l'antiderivata non si chiama antiderivata ma integrale, cosa che in parte rispecchia il fatto che i matematici si sono accorti solo dopo un po' che le operazioni di derivazione e integrazione, a prima vista così diverse, sono l'una l'inverso dell'altra. Ma cosa c'entra l'operazione matematica dal simbolo $\int$ con la farina integrale, o se per questo con l'edizione integrale delle opere di un autore?

Inutile rimarcare che la prima accezione a essere usata nella lingua italiana è quella di tutti i giorni: intorno al 1350 la parola "integrale" entra nel nostro lessico, con il significato di "intero, totale". Non che il termine latino *integralis* sia così antico: la prima sua attestazione risale infatti al VI secolo, in un commento a Cicerone. Mi chiedo chi avesse ancora voglia di commentare Cicerone in quel secolo di invasioni... Naturalmente *integer* è invece già presente nel latino classico, e – colpo di scena! – ha la stessa radice di "tangente". In pratica significa «che non viene toccato», immagino nel senso che non viene diviso in frazioni o chissà cos'altro. Gli inglesi continuano a dire "integral numbers" per "numeri interi", e così di quando in quando capita che qualche casa editrice pubblichi libri in cui si parla di "numeri integrali", suscitando probabilmente ammirazione tra gli innumerati che si chiederanno chissà mai quale arcano concetto è sotteso.

Il passaggio di *integralis* all'operazione nel calcolo infinitesimale è merito di Jakob Bernoulli, che usò il termine nel 1690. Immagino che, più che il significato di "intero", lui ci vedesse quello di "totale"; in fin dei conti l'integrale definito è proprio l'area totale racchiusa da una parte della funzione di partenza. Ci volle mezzo secolo prima di vedere la parola in italiano: nel 1742 Luigi Guido Grandi e nel 1748 Maria Gaetana Agnesi parlarono di "calcolo integrale" (quindi usandolo come aggettivo) e nel 1754 Jacopo Riccati lo usò come sostantivo. Da allora in poi i due significati se ne sono stati ben alla larga uno dall'altro!

(14 settembre 2010)

50. Il problema 3n+1

La congettura di Collatz è semplicissima da enunciare, ma ancora oggi non si sa se è vera o falsa, nonostante tutti gli studiosi che vi si sono cimentati.

Prendete il vostro linguaggio di programmazione favorito, o anche solo carta e penna, e iniziate a fare le seguenti operazioni (se siete tipi informatici, “implementate il seguente algoritmo”). Partite da un numero intero qualsiasi: se è dispari lo moltiplicate per 3 e poi aggiungete uno al risultato, ottenendo un numero pari; se è pari lo dimezzate, ottenendo... non si sa se un numero pari o dispari. Ripetete la cosa finché non ottenete un numero già visto (e quindi entrate in un ciclo infinito), oppure ottenete valori sempre più grandi, e quindi finite nello spazio numerico profondo. Cosa succederà?

Partendo da 1, otterremo 4, 2, 1; abbiamo trovato un ciclo di lunghezza 3. Con 2 ovviamente capita la stessa cosa; prendendo 3, avremo 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 e siamo di nuovo sul ciclo iniziale. Con 7, l'ottovolante dei numeri dà 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10... Toh, un numero già visto: anche stavolta insomma arriviamo al ciclo 1-2-4-1. Sarà sempre cosi? Non si sa. Il problema è noto come Congettura di Collatz, dal nome di chi propose nel 1937; ma è anche nota come “3n+1” (dall'operazione da fare quando si ha un numero dispari), o con tanti altri nomi diversi, il che mostra che ci hanno pensato su in parecchi; Ian Stewart la chiama per esempio Congettura di Collatz-Ulam-Syracuse. D'altra parte, se Erdős affermò che «la matematica non è ancora pronta per problemi di questo tipo» e offrì ben 500$ a colei o colui che fosse riuscito a risolverlo vorrà ben dire qualcosa.
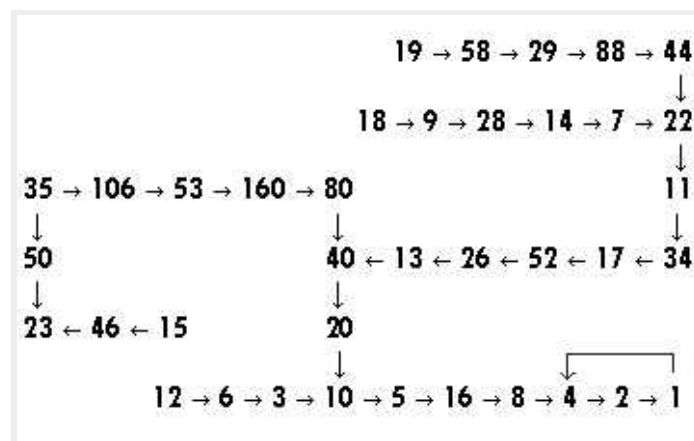
Figura 50.1: orbite dei numeri da 1 a 20 nella congettura 3n+1

A dire il vero ci sono numeri di partenza che danno delle false speranze, mettendoci un bel po' prima di stabizzarsi su quel ciclo; se volete divertirvi, provate a vedere cosa succede partendo da 27. Meglio usarla davvero, la calcolatrice: prima di arrivare a 1 ci sono 111 passi, e si arriva fino a 9232! Ma il destino sembra ineluttabile: come racconta Mathworld, la congettura è stata dimostrata per numeri fino a circa $5{,}48 \cdot 10^{18}$ (no, non li hanno provati tutti, ci sono tecniche raffinate che permettono di saltare molti

valori), e se c'è un ciclo diverso da quello banale esso deve contenere almeno 275000 valori; e a quanto ne so praticamente tutti i matematici, pur sapendo bene che l'evidenza numerica non serve a nulla, la ritengono vera.

Il bello è che basta cambiare di poco le condizioni iniziali per ottenere risultati diversi. Prendiamo ad esempio la non-congettura “3n−1”. Partendo da 1 otteniamo un ciclo 1-2, e partendo da 3 si passa da 8, 4, 2 prima di finire di nuovo nel ciclo; però se prendiamo come numero di partenza 5 il nostro viaggio passa per 14, 7, 20, 10, 5, e in questo caso abbiamo pertanto almeno due cicli possibili. Con la non-congettura “5n+1” la situazione è ancora peggiore; partendo da 7, infatti, il programmino che ho scritto in fretta e furia ha rapidamente superato il limite massimo dei numeri interi rappresentabili dal mio computer, e quindi immagino che i valori corrispondenti crescano senza limite. La cosa mi torna anche statisticamente; quando si arriva a un numero dispari il passo successivo ci porta a un numero pari dell'ordine di cinque volte quello iniziale; in metà dei casi il numero non è divisibile per 4 e quindi anche il secondo passo ci lascia un numero superiore a quello di partenza. Ammetto di non aver voglia di dimostrarlo formalmente, però...

Andando ancora più vicini a una soluzione, la non-congettura “3n+5” ha un ciclo che parte con 38, un numero non esattamente immaginabile a prima vista; e la stessa “3n+1”, se la estendiamo ai numeri negativi, ci dà tre ulteriori cicli che iniziano con −1, −5 e −17, oltre all'ovvio ciclo-pappagallo che ripete ad libitum «zero, zero, zero...». Tutto questo può fare pensare che la mancanza di altri cicli sia proprio un caso, e probabilmente è proprio così: come molti problemi della teoria dei numeri, si pensi alla Congettura di Goldbach, non c'è una via maestra per risolverli proprio perché sono degli accidenti della storia dei numeri. Ciò non toglie che ci sia un'estesissima bibliografia al riguardo: se volete incominciare ad avere un'idea anche grafica di cosa si sa sul problema, date un'occhiata la pagina della successione delle lunghezze nell'On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.

(18 settembre 2010)

Appendice: risposte

Nel testo avevo lasciato alcuni problemini senza risposta: eccovele qua.

♦ Nel torneo di tennis del post 25, qualunque tabellone si prepari non c'è nessuna differenza: si giocherà sempre lo stesso numero di partite, 132. Infatti a ogni partita viene eliminato un giocatore, quindi occorrono necessariamente tante partite quanti sono i giocatori iniziali meno uno. Questo non significa però che tutti i tabelloni siano equivalenti; per esempio si potrebbe minimizzare il numero di turni, supponendo che in ogni turno possono disputarsi più incontri in contemporanea. Quello che appunto non si può fare è minimizzare il numero di incontri da disputare.

♦ Nel problema del post 26, innanzitutto il quadrilatero AJGI è effettivamente un quadrilatero, nel senso che sta tutto in un piano: infatti le due diagonali AG e IJ si incontrano nel centro del cubo. I suoi quattro lati sono indubbiamente uguali; ma non è un quadrato bensì un rombo! Per accorgersene, basta vedere quanto sono lunghe le diagonali. AG, essendo la diagonale del cubo, è pari a $\sqrt{3}\ l$, dove l è il lato del cubo; IJ è invece uguale alla diagonale di una faccia del cubo e quindi è lungo $\sqrt{2}\ l$. L'area di un rombo è pari alla metà del prodotto delle diagonali (se non ci credete, disegnate le parallele alle diagonali nei vertici e vedrete uscir fuori un rettangolo), quindi la sua area sarà $(\sqrt{6}\ l^2)/2$, nel nostro caso pari a $\sqrt{20}$ cm^2.
Per affettare un cubo ottenendo un esagono, basta far passare un piano per tutte e sei le facce del cubo. Scegliendo bene l'angolo si può anche ottenere un esagono regolare.

♦ Nel gioco «L'uovo di Colombo» del post 46, l'idea vincente è quella di iniziare ponendo il primo uovo al centro del tavolo, e poi ripetendo la stessa mossa dell'avversario ruotando il tavolo di 180 gradi. Purtroppo però l'uovo non è simmetrico, quindi il secondo giocatore potrebbe posizionare un proprio uovo attaccato al lato più tondo del nostro primo uovo, impedendoci di fare la mossa simmetrica. La soluzione al problema è letteramente quella dell'uovo di Colombo: il primo uovo viene posto ritto in verticale, e la simmetria richiesta è subito ottenuta!

Indice analitico

Beh, non è un vero indice analitico, ma spero sia comunque utile. Nel seguito trovate il capitolo in cui appaiono gli argomenti (in ***grassetto corsivo***) e i concetti di cui ho parlato.